

Lineare Abbildungen und Matrizen

10.1 Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Warum?
Beweis bzw. Gegenbeispiel!

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} & \text{b) } f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 3x_2 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix} \\
 \text{c) } f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5x_1 - x_2 \\ 0 \\ 3x_2 \end{pmatrix} & \text{d) } f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_3 - x_2 \\ 1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} \\
 \text{e) } f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ -2 \end{pmatrix} & \text{f) } f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_3 \\ |x_2| \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \text{g) } f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} & \text{h) } f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

◁

10.2 Bestimme die zu folgenden linearen Abbildungen gehörigen Matrizen!

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } f_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix} & \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 \text{b) } f_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} & \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\
 \text{c) } f_3\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = (x_1 + x_2 + x_3) & \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1 \\
 \text{d) } f_4\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} & \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\
 \text{e) } f_5((x_1)) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 3x_1 \end{pmatrix} & \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 \text{f) } f_6\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_3 \\ 5x_1 \end{pmatrix} & \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3
 \end{array}$$

◁

10.3 Bestimme die zur Matrix B gehörige lineare Abbildung g !

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \text{b) } B = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \\
 \text{c) } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{d) } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

◁

10.4 Sei $\mathbf{1}_n = (1, 1, \dots, 1)^t$ der $n \times 1$ Einsvektor. Berechne das arithmetische Mittel $\bar{y} = \frac{1}{n} \mathbf{1}_n^t \mathbf{y}$ und die Mittelwert-bereinigten Werte $(I_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^t) \mathbf{y}$ von:

$$\text{a) } n = 5; \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 8 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{b) } n = 8; \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 8 \\ 7 \\ 2 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{c) } n = 6; \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 120 \\ 90 \\ 130 \\ 100 \\ 80 \\ 140 \end{pmatrix}$$

◁

10.5 Berechne folgende zusammengesetzte Abbildungen mit den Angaben aus Beispiel ??:

$$\text{a) } f_3 \circ f_1 \quad \text{b) } f_5 \circ f_3 \quad \text{c) } f_2 \circ f_2 \quad \text{d) } f_6 \circ f_1 \circ f_6$$

◁

10.6 Gegeben seien die linearen Abbildungen f und g

$$f\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_3 - \lambda_1 \\ \lambda_3 - \lambda_2 \end{pmatrix} \quad g\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \mu_2 - \mu_1 \\ -2\mu_1 \\ \mu_1 + 2\mu_2 \end{pmatrix}$$

Bilde die Matrix-Darstellung von

$$\text{a) } g \circ f \quad \text{b) } f \circ g \quad \text{c) } f \circ g \circ f$$

◁

10.7 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechne

$$\text{a) } A\mathbf{x} + A^t\mathbf{y} \quad \text{b) } \mathbf{x}^t A \mathbf{x} + \mathbf{y}^t A \mathbf{y} \quad \text{c) } \mathbf{x}^t A \mathbf{y} + \mathbf{y}^t A \mathbf{x}$$

◁

10.8 Berechne die inverse lineare Abbildung f^{-1} von

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} & \text{b) } f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix} \\ \text{c) } f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 \\ x_2 + 5x_3 \end{pmatrix} & \end{array}$$

◁

10.9 Berechne die Inversen der Diagonalmatrizen $A = \text{diag}(2, 4)$ und $B = \text{diag}(1, 7, 5)$! ◁

10.10 Berechne A^{-1} bzw. B^{-1} !

$$\begin{array}{ll} \text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{d) } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

◁

10.11 Es gilt: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Überprüfe dies an den Matrizen aus Beispiel ?? ! ◁

10.12 Berechne die inverse Matrix !

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \text{b) } \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

◁

10.13 Löse folgende Gleichungssysteme mit Hilfe der inversen Matrix !

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{array}{rcl} x_1 & + & 3x_2 & = & 4 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array} & \text{b) } \begin{array}{rcl} 3x_1 & - & 2x_2 & = & 11 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & = & 2 \\ 6x_1 & + & 8x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \end{array} \end{array}$$

◁