Halbgruppen und Gruppen

6.1 Welche der folgenden Strukturen ist Gruppoid, Halbgruppe, Monoid oder Gruppe?

a) $(\mathbb{N}, +)$	b) $(\mathbb{N}_0, +)$	c) $(\mathbb{Q}, +)$
d) $(\mathbb{Q}, \cdot)$	e) $(\mathbb{R}, +)$	f) $(\mathbb{R}^+, +)$
g) $(\mathbb{R}, \cdot)$	h) $(\mathbb{R}^+, \cdot)$	i) $(\mathbb{Z}, \cdot)$

◁

6.2 Welche der folgenden Strukturen $(S, \circ)$ ist Halbgruppe, Monoid oder Gruppe?

a) $S = \mathbb{N}, x \circ y := \min(x, y)$

b) $S = \mathbb{R}, x \circ y := (x + y)^2$

c) $S = \{1, -1, i, -i\}, x \circ y :=$ komplexe Multiplikation (d. h. $i^2 = -1$)

d) $S = \{1, 2, 4\}, x \circ y := x \cdot_6 y$ (siehe Definition in Beispiel 10.7)

◁

6.3 Ein Ausdruck der Form $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ mit $a_k \in \mathbb{R}, k = 0, \ldots, n$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt „Polynom in x mit reellen Koeffizienten". a_k heißen Koeffizienten von x^k für alle k. Falls k die größte ganze Zahl ist für die $a_k \neq 0$, dann heißt das Polynom vom „Grad k". Falls kein solches existiert ist der Grad 0. Die Menge aller Polynome in x über $\mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{R}[x]$. Wir können in $\mathbb{R}[x]$ auf nahe liegende Art die Operationen '$+$' und '$\cdot$' definieren.

a) Ist $(\mathbb{R}[x], +)$ Gruppoid, Halbgruppe, Monoid, Gruppe, kommutativ?

b) Ist $(\mathbb{R}[x], \cdot)$ Gruppoid, Halbgruppe, Monoid, Gruppe, kommutativ?

c) Bestimme das Inverse von $7x^4 - 2x^3 + 4$ in $(\mathbb{R}[x], +)$!

◁

6.4 Stelle die Verknüpfungstafel für die Permutationsgruppe $G \subseteq S_4$ mit der Generatormenge $\{(2, 4, 3, 1)\}$ auf!

Gib das Einselement von G sowie das Inverse von $(2, 4, 3, 1)$ an!
Die Notation $(a_1, \ldots, a_4)$ bedeutet $\pi(1) = a_1, \ldots, \pi(4) = a_4$.
Hinweis: G hat 3 Elemente! ◁

6.5 Stelle die Verknüpfungstafel für die alternierende Gruppe A_3 von Permutationen von 3 Elementen auf!
Hinweis: Suche aus den in S_3 enthaltenen Permutationen die geraden heraus! ◁

6.6 Sei $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Definiere die „Addition modulo 5" ($+_5$) auf $\mathbb{Z}_5$ durch $x +_5 y = r$, wobei r der Rest der Division von $x + y$ durch 5 ist (Bsp.: $1 +_5 2 = 3, 3 +_5 4 = 2$) und die „Multiplikation modulo 5" ($\cdot_5$) auf $\mathbb{Z}_5$ durch $x \cdot_5 y = r$, wobei r der Rest der Division von $x \cdot y$ durch 5 ist (Bsp.: $2 \cdot_5 3 = 1, 3 \cdot_5 4 = 2$). Eine andere gebräuchliche Darstellung ist $x \equiv r(5)$ oder $x \equiv r \bmod 5$ (sprich: „x kongruent r modulo 5").

a) Ist $(\mathbb{Z}_5, +_5)$ Gruppoid, Halbgruppe, Monoid, Gruppe, kommutativ?

b) Ist $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$ Gruppoid, Halbgruppe, Monoid, Gruppe, kommutativ?

c) Vervollständige folgende Tabellen!

$+_5$	0	1	2	3	4
0					
1			3		
2					
3					2
4					

$\cdot_5$	0	1	2	3	4
0					
1					
2				1	
3					2
4					

d) Bestimme alle Inversen zu den Elementen in $(\mathbb{Z}_5, +_5)$!

e) Welche Elemente von $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$ haben Inverse?

◁

6.7 Sei $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Definiere die „Addition modulo 6" ($+_6$) auf $\mathbb{Z}_6$ durch $x +_6 y = r$, wobei r der Rest der Division von $x + y$ durch 6 ist und die „Multiplikation modulo 6" ($\cdot_6$) auf $\mathbb{Z}_6$ durch $x \cdot_6 y = r$, wobei r der Rest der Division von $x \cdot y$ durch 6 ist.

a) Ist $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ Gruppoid, Halbgruppe, Monoid, Gruppe, kommutativ?

b) Ist $(\mathbb{Z}_6, \cdot_6)$ Gruppoid, Halbgruppe, Monoid, Gruppe, kommutativ?

c) Stelle die Gruppenverknüpfungstafeln auf!

d) Bestimme alle Inversen zu den Elementen in $(\mathbb{Z}_6, +_6)$!

e) Welche Elemente von $(\mathbb{Z}_6, \cdot_6)$ haben Inverse?

◁

6.8 Eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ einer gegebenen endlichen Menge $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ lässt sich durch eine binäre Zeichenkette (0-1-Folge) $b_A = b_1 \cdots b_n$ darstellen,
wobei $b_i = \begin{cases} 1 & \omega_i \in A \\ 0 & \omega_i \notin A \end{cases}$.

a) Beschreibe für Mengen $A, B \in P(\Omega)$, welche Operationen für binäre Zeichenketten den Mengenoperationen $A \cup B$, $A \cap B$ und A^c entsprechen, d. h., wie die Zeichenketten $b_{A\cup B}$, $b_{A\cap B}$ und b_{A^c} aus b_A und b_B gebildet werden!

b) Begründe, warum $(P(\Omega), \cup)$ und $(P(\Omega), \cap)$ Halbgruppen sind! Gib das jeweilige neutrale Element und dessen Darstellung als binäre Zeichenkette an!

c) Welche Operation auf binären Zeichenketten entspricht der Mengenoperation der symmetrischen Differenz $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$?

d) Die *Hamming-Distanz* zwischen den Mengen $A, B \in P(\Omega)$ ist als die Anzahl der Elemente $|A \Delta B|$ in der symmetrischen Differenz definiert. Gib an, wie aus b_A und b_B die Hamming-Distanz zwischen A und B ermittelt werden kann!

◁

6.9 Finde alle Elemente der „Alternierenden Gruppe“ A_4 aller geraden Permutationen von $\{1, 2, 3, 4\}$ und zeige, dass A_4 eine Untergruppe von S_4 der Gruppe aller Permutationen von $\{1, 2, 3, 4\}$ ist! ◁

6.10 Schreibe die Elemente der alternierenden Gruppe A_4 in lexikographischer Ordnung (nach dem Alphabet) auf! ◁

6.11 $(\mathbb{N}^+, +)$ ist eine Halbgruppe. Sei $G = \mathbb{Z}^+$ die Menge der positiven ganzen Zahlen, dann ist $(G, \cdot)$ auch eine Halbgruppe. Zeige, dass die Funktion $\varphi : \mathbb{N}^+ \to G$, definiert durch $\varphi(x) = 2^x$ ein Homomorphismus ist! ◁

6.12 Seien folgende Abbildungen $\varphi : (G, \oplus) \to (H, \odot)$ gegeben.
Welche sind Homomorphismen, welche Isomorphismen?

a) $(G, \oplus) = (\mathbb{N}, +), (H, \odot) = (2\mathbb{N}, +),\ \varphi(x) = 2x$

b) $(G, \oplus) = (\mathbb{N}, +), (H, \odot) = (2\mathbb{N}, \cdot),\ \varphi(x) = 2x$

c) $(G, \oplus) = (\mathbb{R}, +), (H, \odot) = (\mathbb{R}, +),\ \varphi(x) = x^2$

d) $(G, \oplus) = (\mathbb{Z}, +), (H, \odot) = (\mathbb{Z}, +),\ \varphi(x) = 2$

e) $(G, \oplus) = (\mathbb{R}, +), (H, \odot) = (\mathbb{R}, +),\ \varphi(x) = x + 1$

f) $(G, \oplus) = (\mathbb{R}, +), (H, \odot) = (\mathbb{R}, +),\ \varphi(x) = |x|$

g) $(G, \oplus) = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +), (H, \odot) = (\mathbb{Z}, +),\ \varphi((x, y)) = x + 2y$

h) $(G, \oplus) = (\mathbb{R}[x], +), (H, \odot) = (\mathbb{R}, +)$
$\varphi(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0$

◁

6.13 Zeige, dass $\varphi(x) = x \cdot_3 1$ ein Homomorphismus von $(\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ ist!
Bestimme den Kern! ◁