Lineare Geometrie der Ebene

1.1 Finde zwei Geraden g_1 und g_2, die sich im Punkt (12,4) schneiden.

a) Gib diese Geraden in der impliziten Form[1] an.

b) Gib diese Geraden in der expliziten Form[2] an.

c) Führe den Schnitt beider Geraden in der impliziten Form durch.

d) Führe den Schnitt beider Geraden in der expliziten Form durch.

e) Führe ein Gauß'sches Eliminationsverfahren ohne Verwendung von Variablen(namen) durch.

f) Welchen Winkel schließen die Geraden mit der x-Achse ein?

g) Welchen Winkel schließen die Geraden mit der y-Achse ein?

h) Welchen Winkel schließen die Geraden untereinander ein?

i) Finde eine Gerade g_3, die durch den gleichen Schnittpunkt geht.

j) Finde eine Gerade g_4, die mit der x-Achse einen Winkel von $45°$ einschließt und durch den angegebenen Schnittpunkt geht.

k) Finde eine Gerade g_5, die die Steigung $\frac{7}{4}$ hat und durch den angegebenen Schnittpunkt geht.

l) Finde eine Gerade g_6, die durch den Ursprung und durch den angegebenen Schnittpunkt geht.

m) Berechne den (Normal-) Abstand des Ursprungs zur Geraden g_4.

n) Berechne den (Normal-) Abstand des Punktes (1,1) zur Geraden g_4.

o) Gib eine zu g_1 parallele Gerade an. Welchen (Normal-) Abstand haben die beiden Geraden?

◁

1.2 Verwende die Geraden g_1 und g_2 aus dem letzten Beispiel und führe das Gauß'sche Eliminationsverfahren durch. Zeichne die durch die Eliminationsschritte entstehende(n) neue(n) Gerade(n) in eine Skizze ein. ◁

[1] Die implizite Form heißt auch Hessesche Normalform (HNF).
[2] Die explizite Form heißt auch Parameterform.

1.3 Finde zwei Geraden g_1 und g_2, die sich im Punkt (A,B) schneiden und führe alle Berechnungen des obigen Beispiels durch. ◁

Lineare Geometrie des Raumes

2.1 Überlege, welche Lage drei Ebenen im Raum zueinander haben können. Gib für jede mögliche Lage jeweils Gleichungen dreier dazugehöriger Ebenen an. ◁

2.2 Finde drei Ebenen ε_1, ε_2 und ε_3, die sich im Punkt (1,2,3) schneiden.

a) Gib diese Ebenen in der impliziten Form an.

b) Gib diese Ebenen in der expliziten Form an.

c) Wie erhalte ich aus der expliziten Form für ε_1 die implizite Form?

d) Wie erhalte ich aus der impliziten Form für ε_1 die explizite Form?

e) Wie lautet der Normalvektor von ε_2?

f) Gib drei Paare von Vektoren an, die als Richtungsvektoren für die explizite Darstellung von ε_3 dienen können.

g) Gib den Abstand des Ursprungs von ε_2 an.

h) Gib den Abstand des Punktes (1,1,1) von ε_2 an.

i) Finde eine Ebene ε_4 die durch den Ursprung und den Punkt (1,2,3) geht. Gib sowohl die Implizite als auch die explizite Form an.

j) Welche Abstände hat die folgende Gerade g von den Ebenen ε_1, ε_2 und ε_3

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

◁

2.3 Finde drei (unterschiedliche) Ebenen, die sich in der folgenden Geraden g_1 schneiden:

$$g_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

◁

Lineare Gleichungssysteme

2.4 Löse folgende Gleichungssysteme!

a) $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & 2z & = & 10 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ 5x & + & 4y & + & 3z & = & 4 \end{array}$$

◁

2.5 Untersuche die Lösbarkeit folgender Gleichungssysteme!

a) $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & = & 4 \end{array}$$

◁

2.6 Bestimme alle Lösungen der Gleichungssysteme!

a) $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 2 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 11 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 6x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \end{array}$$

◁

2.7 Bestimme sämtliche Lösungen der Gleichungssysteme!

a) $$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 7 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 8 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = & 10 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ & & & & x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 6 \end{array}$$

◁

2.8 Untersuche, ob folgende Gleichungssysteme eine Lösung haben!

a)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 19 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & = & 30 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 4y & + & 2z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & + & 5z & = & 7 \\ 19x & + & 27y & + & 31z & = & 5 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 9x_4 & = & 0 \end{array}$$

◁

2.9 Bestimme alle Lösungen des folgenden homogenen Gleichungssystems!

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 6x_3 & = & 0 \end{array}$$

◁

2.10 Gegeben sei

a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 5x & + & 3y & - & 4z & = & 2 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & z & = & 1 \\ 7x & + & y & - & z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}$$

i) Sind die Gleichungssysteme lösbar? – Warum bzw. warum nicht?

ii) Wie lauten die Lösungen der zugehörigen homogenen Systeme?

◁