Blatt 9

Im Gegensatz zu den Hypothesentest bzgl. Lageparameter von Blatt 8, geht es hier um Tests bzgl der Verteilung und Unabhängigkeit

Chi²-Anpassungstest

$X_1, \dots, X_n$ unabhängig identisch verteilt, aber mit unbekannter Verteilung und unterteilt in k Gruppen [z.B. Intervalle, versch. Eigenschaften]

Nullhypothese: H_0: Die Daten sind ...-verteilt

Prüfgröße: für beobachtete absolute Häufigkeiten n_i, die erwarteten Wahrscheinlichkeiten nach der ...-Verteilung p_i gilt $T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$. T ist χ^2_{k-1}-verteilt

H_0 ablehnen, falls $T > q_{1-\alpha}(k-1)$

Der Chi²-Anpassungstest kann auch bei stetigen Daten eingesetzt werden, allerdings müssen die Daten in diesem Fall gruppiert werden. Eine Alternative zu diesem Vorgehen ist der Kolmogoroff-Smirnov-Test.

Kolmogoroff-Smirnov-Test

$X_1, \dots, X_n$ unabhängig, identisch verteilt, mit unbekannter Verteilung

Nullhypothese: H_0: Die Daten sind F_0-verteilt

Die Prüfgröße ist $T = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)|$, wobei F_n die empirische Verteilungsfunktion ist.

Werden also die Messdaten geordnet, so dass $x_1 \leq \ldots \leq x_n$, dann kann die Prüfgröße als $T = \sup_{x_i} \left| \frac{i}{n} - F_0(x_i) \right|$ gewählt werden.

H_0 abblehnen, falls $T > k_{1-\alpha}(n)$, wobei $k_{1-\alpha}(n)$ der kritische Wert des Kolmogorov-Smirnov-Test ist. (in der verlinkten Tabelle ist die Spaltenbeschriftung der α-Wert, die Einträge $k_{1-\alpha}$)

Chi²- Unabhängigkeitstest

$(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ unabhängig, identisch verteilt

Nullhypothese: H_0: X und Y sind unabhängig

Zerlege die Wertebereich von X bzw Y in k bzw l disjunkte Gruppen. Wähle n_{ij} als Anzahl der Werte mit X-Wert in Gruppe i und Y-Wert in Gruppe j, $n_{i.} = \sum_{j=1}^{l} n_{ij}$ und $n_{.j} = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}$, dann ist die Prüfgröße

$$T = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{(n\, n_{ij} - n_{i.}\, n_{.j})^2}{n\, n_{i.}\, n_{.j}} \sim \chi^2_{(k-1),(l-1)}$$

H_0 ablehnen, falls $T > q_{1-\alpha}((k-1)(l-1))$