Blatt 6

Diskrete ZVen:

Verteilung einer Zufallsvariable $Z=(X,Y)$
[X,Y diskrete ZV] ist

$$f(i,k)=\begin{cases} P(X=i,\ Y=k) & \text{für } i\in\{x_1,x_2,\dots\},\ k\in\{y_1,y_2,\dots\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist die Randverteilung von X definiert als $f_X(i)=P(X=i)=\sum_j f(i,y_j)$.

Die Randverteilung kann aus der Kontingenztafel abgelesen werden:

$$\begin{array}{c|ccc|l} & y_1 & \cdots & y_m & \\ \hline x_1 & p_{11} & \cdots & p_{1m} & f_X(1)=\sum_{j=1}^{m} p_{1j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n & p_{n1} & \cdots & p_{nm} & f_X(n)=\sum_{j=1}^{m} p_{nj} \\ \hline & f_Y(1) & \cdots & f_Y(m) & \\ & \| & & \| & \\ & \sum_{i=1}^{n} p_{i1} & & \sum_{i=1}^{n} p_{im} & \end{array}$$

$p_{ij}=f(x_i,y_j)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit von X gegeben Y ist damit gegeben als:

$$P(X=i\mid Y=k)=f_X(i\mid k)=\frac{f(i,k)}{f_Y(k)}=\frac{P(X=i,\ Y=k)}{P(Y=k)}$$

Gilt $f_Y(k)=0$ ist $f_X(i\mid k)=0$.

Die gemeinsame Verteilungsfunktion von X und Y ist $F(i,k)=P(X\leq i, Y\leq k)=\sum_{l\leq i}\sum_{j\leq k} f(x_l,y_j)$

Stetige ZVen:

Zwei stetige ZVen X,Y sind gemeinsam verteilt, wenn es eine Dichtefunktion $f(x,y)\geq 0$ gibt, so dass $\forall a,b,c,d\in\mathbb{R}$ gilt $P(a\leq X\leq b,\ c\leq Y\leq d)=\int_a^b\int_c^d f(i,k)\,dk\,di$

Die Randdichte von X ist dann $f_X(i) = \int_{-\infty}^{\infty} f(i,k)\,dk$

Die bedingte Dichte von X unter der Bedingung $Y=k$ ist $f_X(i|k) = \frac{f(i,k)}{f_Y(k)}$ für $f_Y(k) \neq 0$

Die gemeinsame Verteilungsfunktion von (X,Y) ist

$F(i,k) = P(X \leq i, Y \leq k) = \int_{-\infty}^{i} \int_{-\infty}^{k} f(u,v)\,dv\,du$

Kovarianz:

Die Kovarianz zweier ZVen X, Y ist

$$Cov(X,Y) = E([X-E(X)][Y-E(Y)]$$
$$= E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$

Es gilt $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$ und für $\tilde{X} = aX + b$, $\tilde{Y} = cY + d$ $Cov(\tilde{X}, \tilde{Y}) = a \cdot c \cdot Cov(X,Y)$

Der Korrelationskoeffizient ρ von X, Y ist gegeben durch $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}}$

Gilt $Cov(X,Y) = 0$ so sind X, Y unabhängig, gilt $\rho(X,Y) = 0$ so heißen sie unkorreliert

Aus der Unabhängigkeit von X, Y folgt immer Unkorreliertheit. Die Umkehrung gilt nicht!

Für eine ZV $X = a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n$ gilt

$E(X) = a_1 E(X_1) + \ldots + a_n E(X_n)$ und

$Var(X) = a_1^2 Var(X_1) + \ldots + a_n^2 Var(X_n) + 2 \sum_{\substack{i<j \\ i,j \in \{1,\ldots,n\}}} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$