Blatt 3

- Zufallsvariable: Merkmal, das durch Zufallsvorgang seinen Wert erhält
- Der angenommene Wert heißt auch Realisierung der Zufallsvariable
- Eine ZV X ist
  … diskret, wenn X endlich oder abzählbar unendl viele Werte annehmen kann
  … stetig, sonst

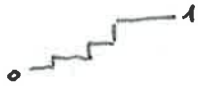
Diskrete ZV:

- Wahrscheinlichkeitsverteilung einer ZV X mit Werten x_i ist durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(x) = P(X=x) = \begin{cases} p_i := P(X=x_i) & \text{für } x = x_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben

- Verteilungsfunktion ist $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\forall x_i \leq x} f(x_i)$
- $F(x)$ ist eine Treppenfunktion, $\max_x F(x) = 1$



- Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ sind unabhängig genau dann, wenn für alle x_i, die jedes X $i=1,\dots,n$ annehmen kann, gilt $P(X_1=x_1, \dots, X_n=x_n) = P(X_1=x_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n=x_n)$

Stetige ZV:

- X besitzt Dichtefunktion $f(x)$, so dass $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$ für alle $[a,b]$ gilt
- Jeder Punkt hat eine Wahrscheinlichkeit von $0 \Rightarrow P(X \geq x) = P(X > x)$
- Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

- $F(x)$ ist monoton steigend, $F(-\infty)=0$, $F(\infty)=1$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$, $P(X \geq a) = 1 - F(a)$
- Ist $f(x)$ stetig, dann gilt $f(x) = F'(x)$
- Stetige ZV $X_1, \dots, X_n$ sind unabhängig genau dann, wenn für alle $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ gilt
  $P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq x_n)$

Um die Verteilung einer ZV $Y = g(X)$ aus der Verteilung von X zu berechnen, beachtet, dass

$f(Y) = f(g(X))$ bzw $F(Y) = F(g(X))$ gilt und so auch

$P(Y=y) = P(g(X)=y)$ bzw. $P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$

Bsp.: $Y = 2X+1$

$P(Y=y) = P(2X+1=y) = P(2X = y-1) = P(X = \frac{y-1}{2})$

$Y = X^2$

$P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$

Aufgabe: Würfelwurf. X = "Augenzahl beim Wurf"
Bestimme Wahrscheinlichkeitsfunktion und Verteilungsfunktion!

$$f(x) = P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x = 1, \dots, 6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{6}$$

Aufgabe: Bestimme die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung

---

$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} P(X=t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Fallunterscheidung:

$x < 0$: $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

$x \geq 0$: $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 0 + \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x$

$= -e^{-\lambda x} + 1$

Aufgabe: X = "Anzahl Würfelwürfe bis eine 6 auftritt"

Y = "Anzahl von Zahl bei 10 Münzwürfen"

Wie sind X und Y verteilt?

$X \sim G(\frac{1}{6})$

$Y \sim B(10, \frac{1}{2})$

Aufgabe: $X \sim N(2, \frac{1}{4})$. Berechne $P(X \leq 2{,}2)$ und x_1 so dass $P(X \leq x_1) = 0.45$

$P(X \leq 2{,}2) = P(Z \leq \frac{2{,}2-2}{0.5}) = \Phi(\frac{0{,}2}{0{,}5}) = \Phi(0{,}4) = 0{,}65542$

mit $Z = \frac{X-2}{0.5} \sim N(0,1)$

$P(X \leq x_1) = 0{,}45 \Leftrightarrow P(Z \leq \frac{x_1 - 2}{0{,}5}) = 0.45 \Leftrightarrow \Phi(\frac{x_1-2}{0{,}5}) = 0{,}45$

$\Leftrightarrow 0{,}55 = 1 - 0{,}45 = 1 - \Phi(\frac{x_1-2}{0{,}5}) = \Phi(-\frac{x_1-2}{0{,}5})$

$u_{0{,}55} = 0{,}12 \Rightarrow \frac{-(x_1-2)}{0{,}5} = 0{,}12 \Leftrightarrow 2 - x_1 = 0{,}06 \Leftrightarrow x_1 = 1{,}94$

$\Phi(u_{0{,}55}) = 0{,}55$