Blatt 7

Eine Schätzfunktion / Schätzstatistik

$T = g(X_1, \dots, X_n)$ für θ schätzt θ für Daten

$X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ mit dem Schätzwert $g(x_1, \dots, x_n)$.

Ist der Erwartungwert für T θ: $E(T) = \theta$, dann

heißt T erwartungstreuer Schätzer.

Der Standardfehler einer Schätzstatistik ist

$\sigma_T = \sqrt{Var(g(X_1, \dots, X_n))}$

Maximum-Likelihood-Prinzip:

$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$ mit $x_1, \dots, x_n$ als bekannten Daten

$\Rightarrow$ Wähle Schätzer $\hat{\theta}$ so, dass $L(\hat{\theta}) = \max_\theta L(\theta)$

bzw so dass $\log(L(\hat{\theta})) = \max_\theta \log(L(\theta))$

$(1-\alpha)$-Konfidenzintervall

Zweiseitig: Finde Intervall für θ mit $P(a \leq \theta \leq b) = 1-\alpha$

einseitig: Finde Intervall für θ mit $P(\theta \leq b) = 1-\alpha$ $[a=-\infty]$,

oder $P(a \leq \theta) = 1-\alpha$ $[b=\infty]$

Für $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 bekannt ist das Konfidenzint. für μ:

zweiseitig: $[\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

einseitig: $[-\infty, \bar{X} + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

Das gilt, da $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

Ist σ^2 unbekannt $\Rightarrow s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \bar{X})^2$ und

zweiseitig: $[\bar{X} - t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}]$

einseitig: $[-\infty, \bar{X} + t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}]$

da $\frac{\bar{X}-\mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$

Für beliebige Verteilungen mit $n > 30$ ist das $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für μ (wegen der Grenzwertsätze):

σ^2 bekannt: $[\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$; $[-\infty; \bar{X} + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

σ^2 unbekannt: $[\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}]$; $[-\infty; \bar{X} + z_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}]$

$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \bar{X})^2$

Das $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für σ^2 und $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

ist $\left[\frac{(n-1)s^2}{q_{1-\alpha/2}(n)} ; \frac{(n-1)s^2}{q_{\alpha/2}(n)}\right]$,

da $\frac{n-1}{\sigma^2} s^2 \sim \chi^2(n-1)$

! Bei diesem Übungsblatt werden oft Erwartungswerte und Varianzen mehrdimensionaler ZVen benötigt ($\rightarrow$ Üb 6)

! Die Werte z_α, $t_\alpha(n)$ und $q_\alpha(n)$ sind Verteilungswerte, die in Tabellen zu finden sind:

$z_\alpha \rightarrow$ Normalverteilung mit Quantil α

$t_\alpha(n) \rightarrow$ Studentsche t-Verteilung mit Quantil α, n Freiheitsgraden

$q_\alpha(n) \rightarrow$ Chi-Quadrat-Verteilung mit Quantil α, n Freiheitsgraden