Blatt 6 - Aufgaben

1) Für einen Würfelwurf gibt es 2 ZVen:
X = "Augenzahl ist gerade/ungerade (1,0)", Y = "Augenzahl ist 3,4 oder 6 (ja=1, nein=0)"

a) Zeichne die zugehörige Kontingenztafel
b) Bestimme die bedingten Wahrscheinlichkeiten für Y gegeben X
c) Bestimme die Covarianz und den Korrelationskoeffizienten.

---

a)

$Y \backslash X$	"gerade" 1	"ungerade" 0	$f_{Y\downarrow}$
"3,4,6" 1	$1/3$	$1/6$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
"nicht.." 0	$1/6$	$1/3$	$\frac{1}{2}$
$f_{X\rightarrow}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$f(1,1) = P(X=1, Y=1)$
$= P(\text{"4,6 gewürfelt"}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
$f(1,0) = P(\text{"2 gewürfelt"}) = \frac{1}{6}$
$f(0,1) = P(\text{"3 gewürfelt"}) = \frac{1}{6}$
$f(0,0) = P(\text{"1,5 gewürfelt"}) = \frac{1}{3}$

b)
$$f_Y(1|1) = \frac{f(1,1)}{f_X(1)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$
$$f_Y(0|1) = \frac{f(0,1)}{f_X(1)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$f_Y(1|0) = \frac{f(1,0)}{f_X(0)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$
$$f_Y(0|0) = \frac{f(0,0)}{f_X(0)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

c)
$$E(X) = 0\cdot f_X(0) + 1\cdot f_X(1) = \tfrac{1}{2}, \quad E(Y) = 0\cdot f_Y(0) + 1\cdot f_Y(1) = \tfrac{1}{2}$$
$$\begin{aligned}Cov(X,Y) &= f(1,1)\cdot(1-E(X))(1-E(Y)) + f(1,0)(1-E(X))(0-E(Y)) \\ &\quad + f(0,1)(0-E(X))(1-E(Y)) + f(0,0)(0-E(X))(0-E(Y)) \\ &= \tfrac{1}{3}\cdot(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{6}(\tfrac{1}{2})(-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{6}(-\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{3}(-\tfrac{1}{2})(-\tfrac{1}{2}) \\ &= \tfrac{1}{12}\end{aligned}$$

$$Var(X) = f_X(0) \cdot (0 - E(X))^2 + f_X(1) \cdot (1 - E(X))^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (0 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2})^2 = 1/4$$

$$Var(Y) = f_Y(0) \cdot (0 - E(Y))^2 + f_Y(1) \cdot (1 - E(Y))^2$$

$$= \frac{1}{2}(0 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{1/12}{\sqrt{1/4}\sqrt{1/4}} = \frac{1/12}{1/4} = \frac{1}{3}$$