Blatt 5

$X_1, \dots, X_n$ sind identisch verteilte ZVen, wenn sie die gleiche Verteilungsfunktion besitzen und somit auch den gleichen Erwartungswert μ und die gleiche Varianz σ^2.
Sind sie zudem unabhängig voneinander, heißen sie unabhängig identisch verteilt. Für diese Zufallsvariablen gelten die folgenden Sätze:

- Schwaches Gesetz der großen Zahlen
  $\lim_{n \to \infty} P(|\bar{X}_{(n)} - \mu| \leq \varepsilon) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$, wobei
  $\bar{X}_{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

- Starkes Gesetz der großen Zahlen
  $P(\lim_{n \to \infty} \bar{X}_{(n)} = \mu) = 1$

- Zentraler Grenzwertsatz
  $$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{\sigma} \leq x\right) = \lim_{n \to \infty} P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \leq x\right)$$
  $$= \Phi(x)$$

Unendlich viele ZVen, die unabhängig identisch verteilt sind, haben also ein arithmetisches Mittel $\bar{X}$, das normalverteilt ist. Damit ist die Standardisierung standardnormalverteilt.
Gibt es nicht unendlich viele unabhängig identisch verteilte ZVen, aber zumindest sehr viele, kann folgende Näherung verwendet werden:

$$P(X_1 + \dots + X_n \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$P(a \leq X_1 + \dots + X_n \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) - \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right), \quad -\infty \leq a < b \leq \infty$

Falls die X_i nur ganzzahlige Werte annehmen und a, b ganze Zahlen sind, dann ist die folgende Näherung besser

$P(a \leq X_1 + \dots + X_n \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - n\mu + \frac{1}{2}}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) - \Phi\left(\frac{a - n\mu - \frac{1}{2}}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$

Daher gilt füreine ZVe Y, die $B(n,p)$ verteilt ist mit großem n

$P(a \leq Y \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np - \frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right)$

Poissonscher Grenzwertsatz:

$Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ ZVen, wobei Y_n $B(n, p_n)$-verteilt ist und

$\lim_{n \to \infty} n p_n = \lambda$ für ein $\lambda > 0$. Dann gilt

$\lim_{n \to \infty} P(Y_n = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$ für $i = 1, 2, \dots$

Binomialapproximation der hypergeom. Verteilung:

Wird aus einer Grundgesamtheit von N Objekten, von denen M eine Eigenschaft A haben, n-mal ohne Zurücklegen gezogen, dann ist die ZV X = "Anzahl gezogener Objekte mit Eigenschaft A" hypergeometrisch verteilt $(X \sim H(n, M, N))$.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} & x \in \{\max(0, n-(N-M)), \dots, \min(n, M)\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$E(X) = n\frac{M}{N}$, $Var(X) = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$

Sei $n \in \mathbb{N}$, $\forall N \geq n$ Y_N sei $H(n, N, M(N))$-verteilt und

$\lim_{N \to \infty} \frac{M(N)}{N} = p$ für ein $p \in (0,1)$, dann gilt

$\lim_{N \to \infty} P(Y_N = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ für $i = 0, 1, \dots, n$