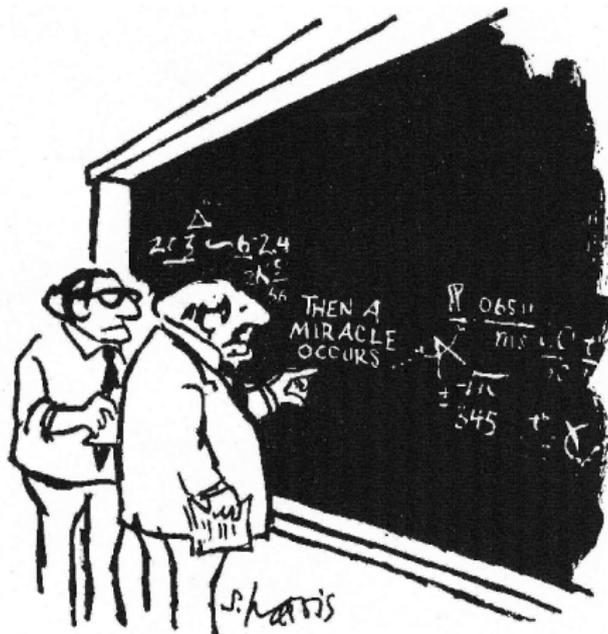


Mathematik als formale Sprache



"I think you should be more explicit here in step two."

Roland Fesselhofer
0505195

Inhalt

Die Struktur der Mathematik

Zeichenketten

Exakte Formulierungen

Übersetzung natürlicher Sprache in mathematische Sprache

Diskussion

Die Struktur der Mathematik

Die Mathematik basiert auf gewissen Grundaussagen (den Axiomen).

Die Struktur der Mathematik

Die Mathematik basiert auf gewissen Grundaussagen (den Axiomen).

Alle Aussagen werden daraus (und aus bereits bekannten Resultaten) durch logische Schlussfolgerungen davon abgeleitet.

Die Struktur der Mathematik

Die Mathematik basiert auf gewissen Grundaussagen (den Axiomen).

Alle Aussagen werden daraus (und aus bereits bekannten Resultaten) durch logische Schlussfolgerungen davon abgeleitet.

Definitionen führen neue Begriffe ein.

Die Struktur der Mathematik

Die Mathematik basiert auf gewissen Grundaussagen (den Axiomen).

Alle Aussagen werden daraus (und aus bereits bekannten Resultaten) durch logische Schlussfolgerungen davon abgeleitet.

Definitionen führen neue Begriffe ein.

Es gibt Regeln, wie gerechnet und wie etwas interpretiert wird.

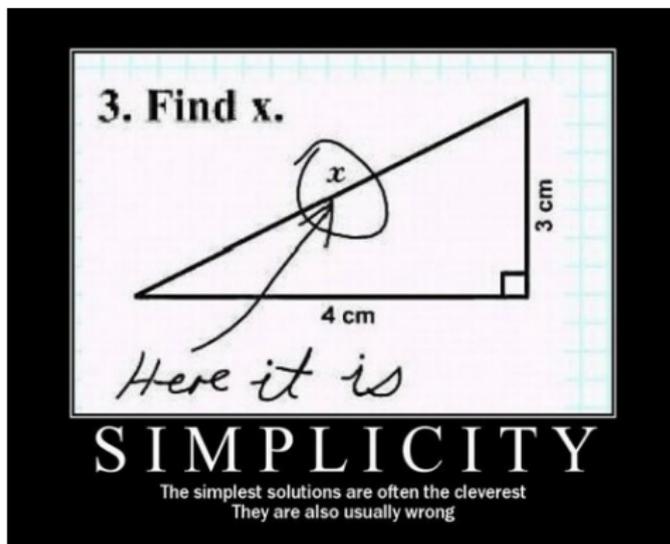
Richtig rechnen

$$\frac{1}{n} \sin x = ?$$

$$\frac{1}{\cancel{n}} \sin \cancel{x} =$$

$$six = 6$$

Richtig interpretieren



Zeichenketten

In der Mathematik gibt es zulässige Zeichenketten (\rightarrow Grammatik, Automaten)

Oft werden formalen Zeichenketten mit natürlicher Sprache gemischt.

Erlaubte Zeichenketten

- ▶ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
(Kleine Lösungsformel für quadratische Gleichungen)

Erlaubte Zeichenketten

- ▶ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
(Kleine Lösungsformel für quadratische Gleichungen)
- ▶ $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
(Binomischer Lehrsatz)

Erlaubte Zeichenketten

- ▶ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
(Kleine Lösungsformel für quadratische Gleichungen)
- ▶ $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
(Binomischer Lehrsatz)
- ▶ $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$
(Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben)

Erlaubte Zeichenketten

- ▶ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
(Kleine Lösungsformel für quadratische Gleichungen)
- ▶ $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
(Binomischer Lehrsatz)
- ▶ $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$
(Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben)
- ▶ Sei $p \geq 2$ eine natürliche Zahl. Dann ist p genau dann eine Primzahl, wenn $(p - 1)! + 1$ durch p teilbar ist.
(Satz von Wilson)

Unzulässige Zeichenketten

▶ $1=2$

Unzulässige Zeichenketten

▶ $1=2$

▶ $-2 > 1$

Unzulässige Zeichenketten

- ▶ $1=2$
- ▶ $-2 > 1$
- ▶ $5 \text{ Äpfel} + 2 \text{ Birnen} = 3 \text{ Bananen}$

Unzulässige Zeichenketten

- ▶ $1=2$
- ▶ $-2 > 1$
- ▶ 5 Äpfel + 2 Birnen = 3 Bananen
- ▶ $(\$)_-(\$) >:D >:@$

Exakte Formulierungen

Sei M die Menge aller Männer und F die Menge aller Frauen. Die Aussage " $m \heartsuit f$ " bedeutet " m liebt f ".

Exakte Formulierungen

Sei M die Menge aller Männer und F die Menge aller Frauen. Die Aussage " $m \heartsuit f$ " bedeutet " m liebt f ".

$$(1) \quad \forall m \in M : \exists f \in F : m \heartsuit f$$

$$(2) \quad \exists f \in F : \forall m \in M : m \heartsuit f$$

Exakte Formulierungen

Sei M die Menge aller Männer und F die Menge aller Frauen. Die Aussage " $m \heartsuit f$ " bedeutet " m liebt f ".

$$(1) \quad \forall m \in M : \exists f \in F : m \heartsuit f$$

Für jeden Mann gibt es eine Frau, die er liebt.

$$(2) \quad \exists f \in F : \forall m \in M : m \heartsuit f$$

Exakte Formulierungen

Sei M die Menge aller Männer und F die Menge aller Frauen. Die Aussage " $m \heartsuit f$ " bedeutet " m liebt f ".

(1) $\forall m \in M : \exists f \in F : m \heartsuit f$

Für jeden Mann gibt es eine Frau, die er liebt.

(2) $\exists f \in F : \forall m \in M : m \heartsuit f$

Es gibt eine Frau, die alle Männer lieben.

Übersetzung natürlicher Sprache in mathematische Sprache

Ein klassisches Textbeispiel:¹

Eine Treppe hat 22 Stufen. Würde jede Stufe um 1.6 cm höher gebaut, könnten zwei Stufen eingespart werden. Wie hoch ist eine Stufe?

¹Quelle: <http://macfunktion.ch/textaufgaben/beispiele/4bsp.shtml> 

Lösung der Textaufgabe

Die einzelnen Schritte zur Lösung:²

(1) Aufgabe verstehen

²Nach: <http://macfunktion.ch/textaufgaben/beispiele/4bsp.shtml> 

Lösung der Textaufgabe

Die einzelnen Schritte zur Lösung:²

- (1) Aufgabe verstehen
- (2) Wahl der Unbekannten: Jede Stufe ist x cm hoch.

²Nach: <http://macfunktion.ch/textaufgaben/beispiele/4bsp.shtml> 

Lösung der Textaufgabe

Die einzelnen Schritte zur Lösung:²

- (1) Aufgabe verstehen
- (2) Wahl der Unbekannten: Jede Stufe ist x cm hoch.
- (3) Aufstellen der Gleichung: $22x = 20 \cdot (x + 1.6)$

²Nach: <http://macfunktion.ch/textaufgaben/beispiele/4bsp.shtml> 

Lösung der Textaufgabe

Die einzelnen Schritte zur Lösung:²

- (1) Aufgabe verstehen
- (2) Wahl der Unbekannten: Jede Stufe ist x cm hoch.
- (3) Aufstellen der Gleichung: $22x = 20 \cdot (x + 1.6)$
- (4) Lösen der Gleichung: $x = 16$

²Nach: <http://macfunktion.ch/textaufgaben/beispiele/4bsp.shtml> 

Lösung der Textaufgabe

Die einzelnen Schritte zur Lösung:²

- (1) Aufgabe verstehen
- (2) Wahl der Unbekannten: Jede Stufe ist x cm hoch.
- (3) Aufstellen der Gleichung: $22x = 20 \cdot (x + 1.6)$
- (4) Lösen der Gleichung: $x = 16$
- (5) Prüfen der Lösung (= Probe)

²Nach: <http://macfunktion.ch/textaufgaben/beispiele/4bsp.shtml> 

Lösung der Textaufgabe

Die einzelnen Schritte zur Lösung:²

- (1) Aufgabe verstehen
- (2) Wahl der Unbekannten: Jede Stufe ist x cm hoch.
- (3) Aufstellen der Gleichung: $22x = 20 \cdot (x + 1.6)$
- (4) Lösen der Gleichung: $x = 16$
- (5) Prüfen der Lösung (= Probe)
- (6) Antwort: Jede Stufe ist 16 cm hoch.

²Nach: <http://macfunktion.ch/textaufgaben/beispiele/4bsp.shtml> 

Von der Gleichung zum Text

"Umkehraufgaben" zu den Textbeispielen:

Erfinde eine Geschichte oder Textaufgabe zu folgender Rechnung:

$$\frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

Von der Gleichung zum Text

"Umkehraufgaben" zu den Textbeispielen:

Erfinde eine Geschichte oder Textaufgabe zu folgender Rechnung:

$$\frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

Z.B.: Hans trinkt auf einer Party beim Empfang ein Achtel Wein und im späteren Verlauf des Abends noch zwei Viertel. Wie viel Wein hat er an diesem Abend insgesamt getrunken?

Diskussion

Wo liegen die Probleme bei der Übersetzung?

In welche Richtung gibt es mehr Probleme?

Danke für jegliche Aufmerksamkeit!

Be my \sin^2 , together we'll be 1.
Yours \cos^2 .

Quellenverzeichnis

Bild 1 (Then a miracle occurs):

http://www.dickatlee.com/humor/then_a_miracle_occurs.html

Bild 2 ($\frac{1}{n} \sin x = 6$):

http://25.media.tumblr.com/tumblr_m1tk1w7FqR1r99uloo1_500.jpg

Bild 3 (Find x):

<http://simonalascu.files.wordpress.com/2011/03/89094833.jpg>