Partielle Ableitungen - Teil 1

Die partielle Ableitung einer mehrdimensionalen Funktion nach x entspricht der Ableitung dieser Funktion unter der Annahme das alle anderen Variablen der Funktion fixiert sind. Für $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$ also die partielle Ableitung von f nach x im Punkt (x_0, y_0)

- Der Definitionsbereich D_f einer Funktion f ist die Menge aller Werte auf denen die Funktion definiert ist.

  Für $f(x,y) = \frac{y}{x-3}$ gilt $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 3\}$.

- Die Niveaumenge $N_f(k)$ ist die Menge aller Werte, die von der Funktion auf den Wert k abgebildet werden:

  hier kann x auch ein Vektor sein

  $N_f(k) = \{x \mid f(x) = k\}$.

  Für $f(x,y) = \frac{x}{y}$ gilt $N_f(0) = \{(x,y) \mid f(x,y) = 0\} = \{(x,y) \mid \frac{x}{y} = 0\}$

  $= \{(x,y) \mid x = 0, y \neq 0\} = \{(0,y) \mid y \neq 0\}$

  und $N_f(2) = \{(x,y) \mid \frac{x}{y} = 2\} = \{(x,y) \mid x = 2y, y \neq 0\} = \{(2y,y) \mid y \neq 0\}$

- Gradientenvektor:

  Der Gradientenvektor einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist der Vektor aller partiellen ersten Ableitungen von f:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

sage math Bsp $f(x,y)=xy$	var('x') var('y') f(x,y) = x * y diff(f)

- Hesse'sche Matrix:

oder auch Hesse-Matrix H_f einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist

die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen von f:

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

sage math	
f(x,y) = xy	f(x,y)=x*y,
	f.hessian()

wenn f 2-mal stetig differenzierbar ist, ist H_f symmetrisch

so gut wie immer der Fall

- Jacobi-Matrix:

Die Jacobi-Matrix Jf einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist

die Matrix der ersten partiellen Ableitungen der Teilfunkt. von f. Für $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ gilt

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Für $m=1$ gilt dann $J_f = (\text{grad} f)^T$

Sage math	
$f(x,y)=\binom{2x}{xy}$	f=(2x,xy)
	jacobian(f, (x,y))

- Richtungsableitung:

Die Ableitung einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in Richtung des Vektors v ist $\text{grad} f \bullet \frac{v}{\|v\|}$

sage-math Bsp	(diff(f) * v/v.norm)

sie beschreibt den Anstieg der Funktion in Richtung von v. Da der Gradient einer Funktion die Richtung der maximalen Steigung angibt, ist die Richtungsableitung für v = grad f am größten.

$a \bullet b$ ist das Skalarprodukt von a und b, d.h. $a \bullet b = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$, wobei n die Länge der Vektoren a, b ist. $\frac{v}{\|v\|}$ nennt man normierter Vektor, dieser Vektor zeigt in Richtung von v, hat aber die Länge 1. Bei der Richtungsableitung wird also nur die Richtung von v beachtet.