Tutorium 2 – MG2

Unbestimmte Integrale

Das unbestimmte Integral ordnet einer Ableitung $f'(x)$ die Funktion $f(x)$ zu. Damit ist die Integration eine Operation, die entgegengesetzt zur Differentiation ist.

Das unbestimmte Integral von $f(x)$,

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

wird als Stammfunktion von $f(x)$ bezeichnet. Da mit $(F(x))' = f(x)$ auch $(F(x)+c)' = f(x)$ $\forall c$ konstant gilt, ist $F(x)+c$ $\forall c$ konst. eine Stammfunktion von $f(x)$, wenn $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist. <u>Die</u> Stammfunktion von $f(x)$ ist daher immer die allgemeine Form: $F(x) + c$ $\forall c$ konstant

- Grundintegrale:

  Ist bekannt, dass $f(x)$ die Ableitung von $F(x)$ ist [s. Tutorium 1 – Differentialrechnung], gilt $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

- Rechenregeln:

  $$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx \qquad a \text{ konstant}$$

  $$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Sage-math Beispiel $\int x \cdot e^x dx$	`var('x')` `f = x*exp(x)` `integral(f,x)`

- Partielle Integration:

Da die Produktregel besagt, dass $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$,

muss auch gelten, dass

$$\int (u \cdot v)' dx = \int u' \cdot v \, dx + \int u \cdot v' dx$$

$$\Leftrightarrow uv = \int u' \cdot v \, dx + \int u \cdot v' dx$$

$$\Leftrightarrow \int u \cdot v' dx = uv - \int u' \cdot v \, dx$$

Beispiel: $\int e^x \cdot x \, dx$ $\quad u(x) = x,\ v(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = 1,\ v'(x) = e^x$

$$= x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

$$= (x-1) \cdot e^x + c$$

- Substitutionsregel:

Einsetzen einer Substitution $z = g(x)$ in das Integral.

Differenziert man diese, erhält man

$$\frac{dz}{dx} = z' = g'(x) \Leftrightarrow dx = \frac{1}{z'} dz$$

und kann so das Integral von $f(g(x))$ auf eines von $f(x)$ zurückführen:

$$\int f(g(x)) \, dx = \int f(z) dx = \int \frac{f(z)}{z'} dz$$

Beispiel: Löse $\int \sin^2 x \cdot \cos x \, dx$ mit der Substitution $z = \sin x$

$$\frac{dz}{dx} = (\sin x)' = \cos x \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos x} dz$$

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x \, dx = \int z^2 \cdot \cos x \, dx = \int z^2 \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} dz = \int z^2 dz$$

$$= \frac{1}{3} z^3 + c = \frac{1}{3} \sin^3 x + c$$