Taylorreihen

Eine Funktion f kann in einer Umgebung um x_0 mithilfe ihrer Ableitungen approximiert werden. Es gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n(x) \quad \text{für } x \text{ aus Umgebung von } x_0$$

$R_n(x)$ ist hier ein Restglied, dass von x und n abhängt, aber im Folgenden nicht näher betrachtet wird.

Es reicht zu wissen, dass f(x) mit

$$T_n f(x;x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

approximiert werden kann und das umso besser desto größer n ist.

$T_n f(x;x_0)$ heißt Taylorreihe nter Ordnung um x_0.

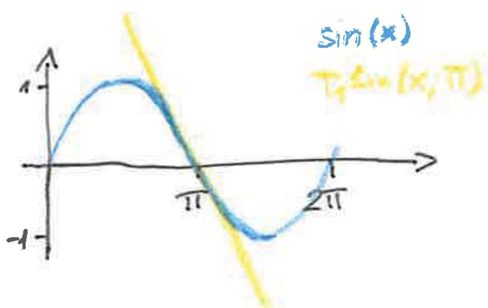
$f^{(k)}$ ist die kte Ableitung von f.

Die Taylorreihen-Entwicklung 1. Ordnung von $f(x)=\sin(x)$ um π ist z. B.:

$$T_1 f(x;\pi) = \sum_{k=0}^{1} \frac{f^{(k)}(\pi)}{k!} (x-\pi)^k = \frac{f^{(0)}(\pi)}{0!}(x-\pi)^0 + \frac{f^{(1)}(\pi)}{1!}(x-\pi)^1$$

$$= \frac{\sin(\pi)}{1} \cdot 1 + \frac{\cos(\pi)}{1} \cdot (x-\pi)$$

$$= 0 + -1(x-\pi) = \pi - x$$



Sage-math Bsp	var('x') f = sin(x) f.taylor(x, pi, 1)