Taylorreihen

7) Berechne die folgenden Taylorreihen:

- Taylorreihe von $f(x)=e^x$ um 0 3. Ordnung

$f(x)=e^x=f^{(1)}(x)=f^{(2)}(x)=f^{(3)}(x)$

$$T_3f(x;0)=\frac{f^{(0)}(0)}{0!}(x-0)^0+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}(x-0)^1+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3$$

$$=\frac{e^0}{1}\cdot 1+\frac{e^0}{1}x+\frac{e^0}{2}x^2+\frac{e^0}{6}x^3$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$$

- Taylorreihe von $f(x)=\sin(x)$ um 0 4. Ordnung

$f(x)=\sin(x)$, $f^{(1)}(x)=\cos(x)$, $f^{(2)}(x)=-\sin(x)$, $f^{(3)}(x)=-\cos(x)$,

$f^{(4)}(x)=\sin(x)$

$$T_4f(x;0)=\frac{\sin(0)}{0!}x^0+\frac{\cos(0)}{1!}x^1+\frac{-\sin(0)}{2!}x^2+\frac{-\cos(0)}{3!}x^3+\frac{\sin(0)}{4!}x^4$$

$$=\frac{0}{0}\cdot 1+\frac{1}{1}\cdot x+\frac{-0}{2}x^2+\frac{-1}{6}x^3+\frac{0}{24}x^4$$

$$=x-\frac{1}{6}x^3$$

- Taylorreihe von $f(x)=\frac{\sin(x)}{x^2+1}$ um 0 1. Ordnung

$f(x)=\frac{\sin(x)}{x^2+1}$, $f^{(1)}(x)=\frac{\cos(x)(x^2+1)-\sin(x)2x}{(x^2+1)^2}$

$$T_1f(x;0)=\frac{\frac{\sin(0)}{0^2+1}}{0!}x^0+\frac{\frac{\cos(0)(0^2+1)-\sin(0)\cdot 2\cdot 0}{(0^2+1)^2}}{1!}x$$

$$=\frac{0}{1}\cdot 1+\frac{1}{1}\cdot x$$

$$=x$$

- Taylorreihe von $f(x)=\sin(x)\cdot\cos(x)$ um 0 2. Ordnung

$f(x)=\sin(x)\cdot\cos(x)$, $f^{(1)}(x)=\sin(x)\cdot(-\sin(x))+\cos(x)\cos(x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$,

$f^{(2)}(x)=2\cos(x)\cdot(-\sin(x))-2\sin(x)\cos(x)=-4\sin(x)\cos(x)$

$$T_2f(x;0)=\frac{\sin(0)\cos(0)}{0!}x^0+\frac{\cos^2(0)-\sin^2(0)}{1!}x^1+\frac{-4\sin(0)\cos(0)}{2!}x^2$$

$$=\frac{0}{1}\cdot 1+\frac{1}{1}\cdot x+\frac{0}{2}\cdot x^2=x$$