Tutorium 3 - MG2

Partielle Ableitungen - Teil 2

- Tangentialebene:

  Erweiterung des Prinzips von Tangenten im 2-dimensionalen Raum auf den 3-dimensionalen Raum.
  Statt eine Gerade so an einen Punkt einer Funktion anzulegen, das sie die Steigung der Funktion in diesem Punkt hat, wird eine Ebene an den Punkt gelegt, so dass sie dieselbe Steigung in x- und y-Richtung hat wie die Funktion im Punkt.
  Die Tangentialebene einer Funktion $f(x,y)=z$ im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ hat die Gleichung

  $$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

- Normale:

  Der Normalenvektor einer Fläche im Punkt P ist der Vektor, der in P senkrecht zur Fläche steht.
  Damit ist der Normalenvektor von $F(x,y,z)=0$ im Punkt (x_0,y_0,z_0): $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$.
  Dies gilt, da der Vektor, der senkrecht auf der Fläche steht, in die Richtung zeigt in die sich die Funktion F am stärksten verändert und der Gradient immer in Richtung des steilsten Anstiegs zeigt.

- Divergenz eines Vektorfelds:

$$\operatorname{div} V = \nabla \cdot V = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}$$

$\nabla \triangleq$ Nabla-Operator

gibt an wie sehr die Vektoren des Vektorfelds V in der Umgebung eines Punktes divergieren.

sage math	`v=vector([x*y,x,x*z])`
$V=\begin{pmatrix} xy \\ x \\ xz \end{pmatrix}$	`v.div([x,y,z])`

- Rotation eines Vektorfelds:

$$\operatorname{rot} V = \nabla \times V = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

sage math	`v=vector([x*y,x,x*z])`
$V=\begin{pmatrix} xy \\ x \\ xz \end{pmatrix}$	`v.curl([x,y,z])`

- Vollständiges Differential:

Gibt die Änderung einer Funktion an einem Punkt $\boldsymbol{x}_0$ bei Änderung der Variablen an:

$$df(dx_1, \dots, dx_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0)\, dx_i$$

d gibt dabei immer unendlich kleine Änderungen an.

- Maximaler Fehler

Die Gleichung des vollständigen Differentials gilt für Änderungen, die nicht unendlich klein sind, nur ungefähr:

$$\Delta f \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0)\, \Delta x_i$$

Ist nun bekannt, dass eine Variable einen Fehler von bis zu Δx_i aufweisen kann, so wird der maximale Fehler der Funktion f im Punkt $\boldsymbol{x}_0$ berechnet als

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0) \right| \Delta x_i$$

- Definitheit:

  Eine $n \times n$-Matrix A heißt

  - positiv definit, falls $x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$
  - positiv semidefinit, falls $x^T A x \geq 0 \ \forall x \neq 0$
  - negativ definit, falls $x^T A x < 0 \ \forall x \neq 0$
  - negativ semidefinit, falls $x^T A x \leq 0 \ \forall x \neq 0$

  Gilt keine Bedingung, so heißt A indefinit.

  Die Definitheit von $n \times n$-Matrizen, die symmetrisch sind, kann auch über die Eigenwerte festgestellt werden:

  A ist dann genau dann

  - positiv definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind
  - positiv semidefinit, wenn alle Eigenwerte ≥ 0 sind
  - negativ definit, wenn alle Eigenwerte < 0 sind
  - negativ semidefinit, wenn alle Eigenwerte ≤ 0 sind
  - indefinit, wenn positive und negative Eigenwerte existieren

  Die Eigenwerte von A können dabei mittels Auflösen der Gleichung

  $$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad (I \mathrel{\hat{=}} \text{Einheitsmatrix})$$

  nach λ gefunden werden.

sage-math	
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	`A = Matrix([[1,2,3],[2,1,1][3,1,2]])` `A.eigenvalues()`

Alternativ kann die Definitheit über die führenden Hauptminoren einer symmetrischen Matrix festgestellt werden. Die führenden Hauptminoren einer Matrix sind die ersten k Zeilen und Spalten der Matrix für $k = 1, \dots, n$. Zum Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1 = (1), \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sind die Determinanten aller führender Hauptminoren positiv, so ist die Matrix positiv definit.
Die Matrix ist negativ definit, wenn die Determinante von A_k für ungerade k negativ und gerade k positiv ist. Für semidefinite oder indefinite Matrizen kann über die Hauptminoren keine Aussage getroffen werden.

- Extremstellen:

Extrema einer mehrdimensionalen Funktion können über den Gradienten und die Definitheit der Hessematrix bestimmen.
Ein kritischer Punkt ist ein Punkt, bei dem der Gradient der Funktion 0 ist. Dieser kritische Punkt ist ein Maximum, wenn die Hessematrix in diesem Punkt negativ definit ist. Ist die Hessematrix positiv definit, dann ist der kritische Punkt ein Minimum. Ist die Hessematrix indefinit, dann ist der kritische Punkt ein Sattelpunkt.