Aufgaben zum Tutorium 3 – MG2

Partielle Ableitungen – Teil 2

1) Stelle die Gleichung der Tangentialebene von f im Punkt P auf

- $f(x,y) = 2x^2 + xy, \quad P=(0,1)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x$

$z = f(0,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)(y-1)$

$= 2\cdot 0^2 + 0\cdot 1 + (4\cdot 0 + 1)\cdot(x) + (0)\cdot(y-1)$

$= x$

- $f(x,y) = 3x + 5y + xy \qquad P=(2,1)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 5 + x$

$z = f(2,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)(y-1)$

$= 3\cdot 2 + 5\cdot 1 + 2\cdot 1 + (3+1)(x-2) + (5+2)(y-1)$

$= 13 + 4(x-2) + 7(y-1)$

$= -2 + 4x + 7y$

- $f(x,y) = x^2 + xy \qquad P=(3,2)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x$

$z = f(3,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(3,2)(x-3) + \frac{\partial f}{\partial y}(3,2)(y-2)$

$= 3^2 + 3\cdot 2 + (2\cdot 3 + 2)(x-3) + 3\cdot(y-2)$

$= 15 + 8(x-3) + 3(y-2)$

$= -15 + 8x + 3y$

2) Gebe die Normale der folgenden Flächen im Punkt P an

- Fläche: $\sin(x) + xyz + 3z^2 = 0 \qquad P = (0,4,2)$

$F(x,y,z) = \sin(x) + xyz + 3z^2$

$$n = \nabla F(0,4,2) = \begin{pmatrix} \cos(0) + 4\cdot 2 \\ 0\cdot 2 \\ 0\cdot 4 + 6\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+8 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

- Fläche: $xyz^2 + 5e^{xy} + y^3 = 0 \qquad P = (3,0,1)$

$F(x,y,z) = xyz^2 + 5e^{xy} + y^3$

$$n = \nabla F(3,0,1) = \begin{pmatrix} 0\cdot 1^2 + 5\cdot 0\, e^{3\cdot 0} \\ 3\cdot 1^2 + 5\cdot 3 e^{3\cdot 0} + 3\cdot 0^2 \\ 2\cdot 3\cdot 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Fläche: $x^2y + zx + zy + xyz^3 \qquad P = (1,2,3)$

$F(x,y,z) = x^2y + zx + zy + xyz^3$

$$n = \nabla F(1,2,3) = \begin{pmatrix} 2\cdot 1\cdot 2 + 3 + 2\cdot 3^3 \\ 1^2 + 3 + 1\cdot 3^3 \\ 1 + 2 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + 2\cdot 27 \\ 4 + 27 \\ 3 + 2\cdot 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61 \\ 31 \\ 57 \end{pmatrix}$$

3) Gebe die Divergenz und Rotation der Vektorfelds $V = \begin{pmatrix} x^2y \\ -xyz^3 \\ xy^2z \end{pmatrix}$ im Punkt $(-1,1,1)$

$$\operatorname{div} V = \nabla \cdot V = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = 2xy + (-xz^3) + xy^2$$

$$\operatorname{div} V(-1,1,1) = 2(-1)\cdot 1 - (-1)\cdot 1^3 + (-1)\cdot 1^2$$
$$= -2$$

$$\operatorname{rot} V = \nabla \times V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2xyz) - (-3xyz^2) \\ 0 - (y^2 z) \\ (-yz^3) - (x^2) \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} V(-1,1,1) = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1)\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot(-1)\cdot 1\cdot 1^2 \\ -1^2\cdot 1 \\ -1\cdot 1^3 - (-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4) Gebe die vollständigen Differentiale folgender Funktionen an

- $f(x,y,z) = 3x^2 + xy + 4yz \qquad P=(1,2,1)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 4z \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4y$

$$df(dx,dy,dz) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$
$$= (6\cdot 1 + 2)dx + (1 + 4\cdot 1)dy + 4\cdot 2 dz$$
$$= 8dx + 5dy + 8dz$$

- $f(x,y) = \sin(x\cdot y) + x^2 y \qquad P=(0,5)$

$$df(dx,dy) = (\cos(0\cdot 5)\cdot 5 + 2\cdot 0\cdot 5)\,dx + (0\cdot\cos(0\cdot 5) + 0^2)\,dy$$
$$= 5dx + 0dy = 5dx$$

- $f(x,y) = x^2 + 2x^3 + 7xy + 5 \qquad P=(2,4)$

$$df(dx,dy) = (2\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 2^2 + 7\cdot 4)\,dx + (7\cdot 2)\,dy$$
$$= 56dx + 14dy$$

5) Gebe den Maximalfehler an

• $f(x,y) = x^2y^3 + 3xy \qquad x = 5 \pm 0{,}2 \qquad y = 3 \pm 0{,}3$

$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|\Delta y$

$= |(2\cdot 5\cdot 3^3 + 3\cdot 3)|\Delta x + |(3\cdot 5^2\cdot 3^2 + 3\cdot 5)|\Delta y$

$= 279\cdot 0{,}2 + 690\cdot 0{,}3$

$= 262{,}8$

• $f(x,y) = 5x^2y^2 + 3xy \qquad x = 3 \pm 0{,}1 \qquad y = 4 \pm 0{,}2$

$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|\Delta y$

$= |5\cdot 2\cdot 3\cdot 4^2 + 3\cdot 4|\cdot 0{,}1 + |5\cdot 3^2\cdot 2\cdot 4 + 3\cdot 3|\cdot 0{,}2$

$= 49{,}2 + 73{,}8 = 123$

6) Bestimme die Definitheit der folgenden Matrizen mittels der Eigenwerte

• $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$

$\det(A - \lambda I) = \left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right|$

$= (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 0 + 1\cdot 0\cdot 0 - 0\cdot 0\cdot(1-\lambda) - 0\cdot 0\cdot(1-\lambda)$
$- (2-\lambda)\cdot 1\cdot 1$

$= (1-2\lambda+\lambda^2)(2-\lambda) - 2 + \lambda$

$= 2 - 4\lambda + 2\lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 2 + \lambda$

$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda$

$\det(A-\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 2 \vee \lambda = -2$

$\Rightarrow A$ ist indefinit

$\cdot\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 1 - (1-\lambda)\cdot 1\cdot 1$$
$$- 0\cdot 0\cdot (2-\lambda) - 1\cdot 1\cdot (1-\lambda)$$
$$= (2-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2) - 1 + \lambda - 1 + \lambda$$
$$= 2 - 4\lambda + 2\lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 2 + 2\lambda$$
$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda$$

$\det(A - \lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 0 \ \vee \ \lambda = 1 \ \vee \ \lambda = 3$

$\Rightarrow$ A ist positiv semidefinit

7) **Bestimme die Definitheit der folgenden Matrizen über ihre führenden Hauptminoren**

$\cdot\ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -10 \end{pmatrix}$

$A_1 = (-2) \Rightarrow |A_1| = -2 < 0$

$A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A_2| = \left| \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right| = (-2)(-1) - 1 = 1 > 0$

$A_3 = A \Rightarrow |A| = \left| \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -10 \end{pmatrix} \right| = (-2)(-1)(-10) + 1^3 + 1^3 - (-1)1^2 - (-2)1^2 - (-10)1^2$
$= -20 + 2 + 1 + 2 + 10 = -5 < 0$

$\Rightarrow$ für $k = 1, 3$ (k ungerade) $\det A_k < 0$, $k = 2$ (k gerade) $\det A_k > 0$

$\Rightarrow$ A ist negativ definit

- $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$A_1 = (4) \Rightarrow |A_1| = 4$

$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A_2| = 4 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 3$

$A_3 = A \Rightarrow |A_3| = 4 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 4 - 1 \cdot 1 \cdot 5$

$= 20 + 2 + 2 - 4 - 4 - 5$

$= 11$

$\Rightarrow$ Determinanten aller führender Hauptminoren positiv

$\Rightarrow$ positiv definit

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$A_1 = (3) \Rightarrow |A_1| = 3$

$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A_2| = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5$

$A_3 = A \Rightarrow |A_3| = |A| = 3^3 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 3$

$= 27 - 3 - 12$

$= 12$

$\Rightarrow$ A ist positiv definit

8) Bestimme die Extrema & Sattelpunkte der folgenden Funktionen

- $f(x,y) = -x \cdot 14 + 2xy$

⑥

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -14+2y \\ 2x \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = 0$$

$$\Leftrightarrow x=0,\ y=7$$

$\Rightarrow (0,7)$ ist ein kritischer Punkt

$$H_f = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow H_f(0,7) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(H_f(0,7) - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - 4 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = -2$$

$\Rightarrow H_f(0,7)$ ist indefinit

$\Rightarrow (0,7)$ ist ein Sattelpunkt

- $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4y \\ 4y^3 - 4x \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = 0$$

$$\Leftrightarrow y = x^3 \wedge x = y^3 \Leftrightarrow (0,0) \vee (-1,-1) \vee (1,1)$$

$$H_f = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(H_f(0,0) - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & -4 \\ -4 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - 16 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \lor \lambda = -4$$

$\Rightarrow H_f(0,0)$ ist indefinit

$\Rightarrow (0,0)$ ist ein Sattelpunkt

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\det(H_f(1,1) - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} 12-\lambda & -4 \\ -4 & 12-\lambda \end{pmatrix} \right| = (12-\lambda)^2 - 16 = \lambda^2 - 24\lambda + 144 - 16$$

$$= \lambda^2 - 24\lambda + 128 \overset{!}{=} 0$$

$\lambda = 16 \lor \lambda = 8$

$\Rightarrow H_f(1,1)$ ist negativ definit

$\Rightarrow (1,1)$ ist ein Maximum

$$H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

$\overset{s.(1,1)}{\Longrightarrow} (-1,-1)$ ist ein Maximum