Mehrfachintegrale

Mehrfachintegrale integrieren über mehrdimensionale Mengen statt über eindimensionale. Sie weisen also einer Menge die Summe der Funktionswerte je Teilmenge zu. Damit ergibt sich z.B. für das Integral einer Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ das Volumen zwischen $f(x,y)$ und der x-y-Ebene (Ebene in der $z=0$ gilt).

Wird die Funktion $f(x_1, \dots, x_n) = 1$ über eine Menge M integriert, so ist das Ergebnis das Volumen der Menge M (für $n=2$ die Fläche).

Ein Mehrfachintegral der Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ für $x_i \in [a_i, b_i]$ ist

$$\int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

Dieses Integral wird von innen nach außen gelöst, wobei beim Integral nach der Variable x_j immer nur x_j als Variable und alle x_i $i \neq j$ als konstant angenommen werden.

Beispiel: Integriere $f(x,y) = xy + x^2$ mit $x \in [0,2]$, $y \in [-1,1]$

$$\int_{-1}^{1} \int_{0}^{2} xy + x^2 dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left[\tfrac{1}{2}x^2 y + \tfrac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{2} dy = \int_{-1}^{1} \left(\tfrac{1}{2}2^2 y + \tfrac{1}{3}2^3\right) - 0\, dy$$

$$= \int_{-1}^{1} 2y + \tfrac{8}{3} dy = \left[\tfrac{2}{2}y^2 + \tfrac{8}{3}y\right]_{y=-1}^{1} = \left(1^2 + \tfrac{8}{3}\right) - \left((-1)^2 - \tfrac{8}{3}\right)$$

$$= \frac{16}{3}$$

- Satz von Fubini:

Ist die Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ auf $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ stetig, d.h. sie in diesem Bereich keine Sprünge oder Definitionslücken aufweist, dann gilt

$$\int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1,\dots,x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int_{[a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]} f(x_1,\dots,x_n)\, d(x_1,\dots,x_n)$$

und die Reihenfolge der Integrale kann beliebig abgeändert werden.

Mit diesen Satz kann z.B. $f(x,y) = x^2 y$ über $M = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2, -1 \le y \le x\}$ integriert werden:

$$\int_M f(x,y)\, d(x,y) = \int_0^2 \int_{-1}^x x^2 y \, dy\, dx = \int_0^2 \left[\tfrac{1}{2} x^2 y^2\right]_{y=-1}^x dx = \int_0^2 \left(\tfrac{1}{2}x^4\right) - \left(\tfrac{1}{2}x^2(-1)^2\right) dx$$

$$= \int_0^2 \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{2}x^2 dx = \left[\tfrac{1}{10}x^5 - \tfrac{1}{6}x^3\right]_{x=0}^2 = \tfrac{1}{10}2^5 - \tfrac{1}{6}2^3 = \tfrac{16}{5} - \tfrac{4}{3} = \tfrac{28}{15}$$

- Transformation:

  Manchmal ist es sinnvoll das Koordinatensystem zu transformieren um ein Integral besser lösen zu können.

  2-dimensionaler Fall ($\iint_B f(x,y)\, dx\, dy$):

  Gibt es die Transformationsfunktionen $\Phi(x,y) = u$, $\Psi(x,y) = v$ und die zugehörigen Funktionen $x = \tilde{\Phi}(u,v)$, $y = \tilde{\Psi}(u,v)$ gilt:

  $$\iint_M f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{\tilde{M}} \tilde{f}(u,v)\, |\det D|\, du\, dv$$

  $\det D$ ist die Funktionaldeterminante

  $$\det D = \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial v} \\ \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial v} \end{pmatrix}$$

  und $\tilde{f}(u,v) = f(\tilde{\Phi}(u,v), \tilde{\Psi}(u,v))$, $\tilde{M} = M(\tilde{\Phi}(u,v), \tilde{\Psi}(u,v))$.

Beispiel: $\iint_M \frac{(x+y)^2}{x-y}\,dx\,dy \qquad M=\{(x,y) \mid 0\le x+y\le 4,\ 1\le x-y\le 2\}$

$u=x+y,\quad v=x-y \iff x=u-y,\ y=x-v \iff x=u-(x-v) \iff x=\frac{u+v}{2}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad y=(u-y)-v \iff y=\frac{u-v}{2}$

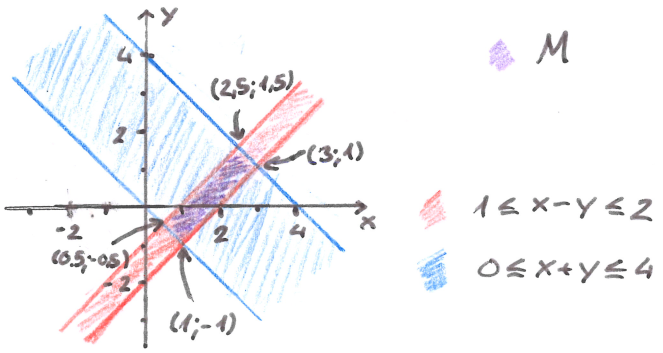
$$D=\begin{pmatrix} \frac{\partial\left(\frac{u+v}{2}\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(\frac{u+v}{2}\right)}{\partial v} \\ \frac{\partial\left(\frac{u-v}{2}\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(\frac{u-v}{2}\right)}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\det D| = \left|\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{-1}{2}\right)-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\right| = \left|\tfrac{-2}{4}\right| = \left|\tfrac{-1}{2}\right| = \tfrac{1}{2}$$

$\tilde{M}=\{(u,v) \mid 0\le u\le 4,\ 1\le v\le 2\}, \quad \tilde{f}(u,v)=\frac{u^2}{v}$

$$\iint_M \frac{(x+y)^2}{x-y}\,dx\,dy = \iint_{\tilde{M}} \frac{u^2}{v}\,|\det D|\,du\,dv = \int_1^2\int_0^4 \frac{u^2}{v}\,\frac{1}{2}\,du\,dv = \int_1^2 \left[\frac{1}{6}\,\frac{u^3}{v}\right]_{u=0}^4 dv$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{6}\,\frac{4^3}{v}\,dv = \int_1^2 \frac{32}{3}\,\frac{1}{v}\,dv = \left[\frac{32}{3}\ln(v)\right]_{v=1}^2 = \frac{32}{3}(\ln(2)-\ln(1))$$

$$= \frac{32}{3}(\ln(2)-0) = \frac{32}{3}\ln(2)$$



3-dimensionaler Fall:

Funktioniert analog

$u_1=\Phi_1(x_1,x_2,x_3),\ u_2=\Phi_2(x_1,x_2,x_3),\ u_3=\Phi_3(x_1,x_2,x_3),\ x_1=\tilde{\Phi}_1(u_1,u_2,u_3),\ x_2=\tilde{\Phi}_2(u_1,u_2,u_3),$
$x_3=\tilde{\Phi}_3(x_1,x_2,x_3)$:

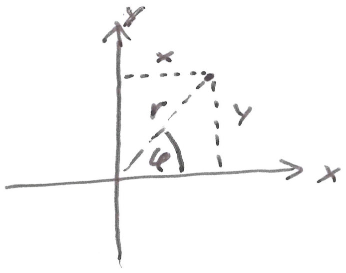
$$\iiint_M f(x_1,x_2,x_3)\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \iiint_{\tilde{M}} \tilde{f}(u_1,u_2,u_3)\,|\det D|\,du_1\,du_2\,du_3$$

$\tilde{M}=M(\tilde{\Phi}_1(u_1,u_2,u_3),\tilde{\Phi}_2(u_1,u_2,u_3),\tilde{\Phi}_3(u_1,u_2,u_3)),\ \tilde{f}(u_1,u_2,u_3)=f(\tilde{\Phi}_1(u_1,u_2,u_3),\tilde{\Phi}_2(u_1,u_2,u_3),$
$\tilde{\Phi}_3(u_1,u_2,u_3)),$

$$\det D = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial\tilde{\Phi}_1}{\partial u_1} & \frac{\partial\tilde{\Phi}_1}{\partial u_2} & \frac{\partial\tilde{\Phi}_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial\tilde{\Phi}_2}{\partial u_1} & \frac{\partial\tilde{\Phi}_2}{\partial u_2} & \frac{\partial\tilde{\Phi}_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial\tilde{\Phi}_3}{\partial u_1} & \frac{\partial\tilde{\Phi}_3}{\partial u_2} & \frac{\partial\tilde{\Phi}_3}{\partial u_3} \end{pmatrix}$$

- Polarkoordinaten

Auch Kreiskoordinaten geben einen Punkt mittels des Abstands r zum Ursprung sowie dessen Winkel φ zur x-Koordinate an:



Es gilt $x = r \cdot \cos(\varphi)$ $\quad y = r \sin(\varphi)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \text{für } y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \text{für } y < 0 \end{cases}$$