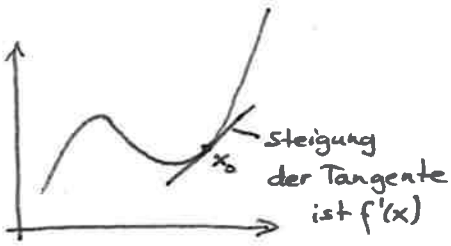
Tutorium 1 – MG2

Differentialrechnung

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} \longrightarrow f'(x) \quad \text{für } h \to 0$$



$f'(x)$ ist also die Steigung einer Funktion $f(x)$ am jeweiligen Pkt x und wird Differentialquotient bzw. Ableitung von $f(x)$ genannt.

Eine Funktion $f(x)$ kann unter Anwendung folgender Regeln differenziert werden:

- Potenzregel: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$
- Faktorregel: $f(x) = a \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = a \cdot g'(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (auch $\in \mathbb{C}$)
- Summenregel: $f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$
- Produktregel: $f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
- Quotientenregel: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$
- Kettenregel: $f(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

Dabei helfen die Ableitungen besonderer Funktion:

$f(x)$	$f'(x)$
$a \ (\in \mathbb{R})$	0
e^x	e^x
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

$f(x)$	$f'(x)$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$
$a^x = e^{x \cdot \log(a)}$	$a^x \cdot \log(a)$

$\log = \log_e$

sagemath - Beispiel $(x^3)'$	
	var('x')
	f=x^3
	f.diff(x)

Spezielle Differenzierungsmethoden

- Implizite Differentiation

Liegt eine Funktion $y(x)$ nicht direkt sondern nur in Form einer Differentialgleichung vor, also als $F(x, y(x)) = 0$, dann kann die Ableitung von y als

$$y'(x) = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} \quad \forall x \in \{x \mid \partial F/\partial y \neq 0\} \qquad (*)$$

gefunden werden.

[$\frac{\partial F}{\partial x}$ ist eine partielle Ableitung, also die Ableitung einer Funktion mit mehreren Variablen nach nur einer Variable. Dabei werden die Variablen nach denen nicht abgeleitet wird wie Konstanten behandelt

z.B. $\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy + 5y) = 2x + y$]

Die Gleichung $(*)$ wird gefunden, in dem von beiden Seiten der Gleichung $F(x, y(x)) = 0$ das totale Differential berechnet wird.

[Das totale Differential einer Funktion nach einer Variable, leitet im Gegensatz zur partiellen Ableitung die übrigen Variablen auch ab statt sie als Konstante zu betrachten

z.B. $\frac{d}{dx}(x^2 + xy + 5y) = 2x + y + x \cdot \frac{dy}{dx} + 5\frac{dy}{dx}$]

Daraus ergibt sich dann $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0$

und damit $(*)$.

sage-math	
$x^2 + xy + 5y = 0$	`x=var('x')`
	`y=var('y')`
	`f(x,y) = x^2+xy+5y`
	`y = function('y')(x)`
	`solve(diff(f(x,y)),diff(y))`

- Differentiation mit Logarithmieren

Soll die Ableitung von y gefunden werden und y ist in der Form $y = f(x)$ gegeben, kann Gleichung zunächst logarithmiert und anschließend differenziert werden:

$$y = f(x) \Leftrightarrow \log(y) = \log(f(x)) \Rightarrow ((\log(y))' = (\log(f(x)))'$$

$$\Leftrightarrow \log'(y) \cdot y' = (\log(f(x)))'$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = (\log(f(x)))'$$

$$\Leftrightarrow y' = (\log(f(x)))' \cdot y$$

Diese Vorgehensweise ist sinnvoll, wenn $f(x) = u(x)^{v(x)}$, da in diesem Fall $\log(f(x)) = \log(u(x)^{v(x)}) = \log(e^{v(x)\cdot\log(u(x))})$
$= v(x) \cdot \log(u(x))$

gilt.

Substitution: Manchmal ist es einfacher Gleichungen aufzulösen, wenn ein wiederauftretender Term als neue Variable definiert wird. Die Gleichung kann dann statt nach der alten Variable nach der neuen Variable aufgelöst werden. Abschließend muss dann wieder auf die alte Variable rücksubstituiert werden.

$$\frac{2(x^2+1)}{(x^2+2)} = 1 \overset{\substack{\text{Substitution:} \\ z = x^2+1}}{\Longleftrightarrow} \frac{2z}{(z+1)} = 1 \Leftrightarrow 2z = (z+1)$$

$$\Leftrightarrow z = 1$$

$$\overset{\text{Rücksubst.}}{\Longleftrightarrow} x^2+1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Vektorwertige Funktionen

Bildet eine Funktion f auf einen Vektor $\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$ ab so gilt: $\frac{df}{dx} = \begin{pmatrix} df_1/dx \\ \vdots \\ df_n/dx \end{pmatrix}$

Ableitung nach der Zeit t: Wenn eine Funktion f nach t abgeleitet wird, wird dies oft statt mit $\frac{df}{dt}$ mit $\dot{f}$ notiert

Euklidische Norm: Die euklidische Norm eines Vektors $\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right\|$ weist jedem Vektor ein Skalar zu.

Es gilt $\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$

Kreuzprodukt/Vektorprodukt: ist eine Verknüpfung von Vektoren im 3-dimensionalen Raum. Es gilt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Trigonometrische Gleichungen:

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$