Bestimmte Integrale

Will man die Fläche A berechnen, die die Funktion f mit der x-Achse und den Funktionen y=a und y=b einschließt, so kann man versuchen die Fläche mit Balken zu füllen und deren Flächen zu summieren

Es ist klar, dass die Balkenfläche sich A annähert, wenn die Balkenbreite sich 0 annähert.

Dieser Grenzwert, der der Fläche A entspricht, ist das bestimmte Integral von f mit den Grenzen a und b: $\int_a^b f(x)\,dx = [\underbrace{F(x)}_{\text{unbest. Int.}}]_a^b = F(b) - F(a)$

So ist die Fläche einer Geschwindigkeitsfunktion zwischen a und b genau die Strecke die zwischen a und b zurückgelegt wurde.

Dabei sollte beachtet werden, dass wenn f eine negative Funktion ist, auch das bestimmte Integral negativ wird. Im Geschwindigkeitsbeispiel: Geht es um eine bestimmte Laufstrecke und der Läufer läuft zurück (hat eine negative Geschwindigkeit) so kann die Strecke als negativ betrachtet werden. Ist nur gefragt wieviel der Läufer gelaufen ist und nicht um wieviel er sich auf der vorgegebenen Strecke vorwärts bewegt hat, so ist das bestimmte Integral der absoluten Geschwindigkeitsfunktion interessant: $\int_a^b |f(x)|\,dx$

Da überdies gilt:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

[die Summe der Einzelflächen entspricht der Gesamtfläche] kann man $\int_a^b |f(x)|dx$ berechnen, indem die Schnittpunkte von $f(x)$ mit der x-Achse bestimmt werden und die Absolutwerte der Teilintegrale zwischen den Schnittpunkten berechnet werden.

Beispiel: Berechne $\int_{-2}^{2} |x^3-1|dx$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-1=0 \Leftrightarrow x_1=1$

kein Schnittpkt in Teilintervallen

$$\int_{-2}^{2}|x^3-1|dx = \int_{-2}^{1}|x^3-1|dx + \int_{1}^{2}|x^3-1|dx \overset{\downarrow}{=} \left|\int_{-2}^{1}x^3-1\,dx\right| + \left|\int_{1}^{2}x^3-1\,dx\right|$$

$$= \left|\left[\tfrac{1}{4}x^4-x\right]_{-2}^{1}\right| + \left|\left[\tfrac{1}{4}x^4-x\right]_{1}^{2}\right|$$

$$= \left|\left(\tfrac{1}{4}\cdot 1-1\right)-\left(\tfrac{1}{4}(-2)^4-(-2)\right)\right| + \left|\left(\tfrac{1}{4}\cdot 2^4-2\right)-\left(\tfrac{1}{4}\cdot 1-1\right)\right|$$

$$= \left|\tfrac{-3}{4}-\left(\tfrac{16}{4}+2\right)\right| + \left|\tfrac{16}{4}-2-\left(-\tfrac{3}{4}\right)\right| = \left|-\tfrac{27}{4}\right| + \left|\tfrac{11}{4}\right| = \tfrac{27}{4}+\tfrac{11}{4} = \tfrac{38}{4}$$

$$= \tfrac{19}{2} = 9{,}5$$

Außerdem gelten folgende Regeln:

$$\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Sage-math Beispiel $\int_{-2}^{1} x^3-1\,dx$	var('x') integral(x^3-1, x,-2,1)