Arbeiten mit Matrizen

11.1 Rang, Dimension und Basis

11.1 Welche der folgenden Mengen von Vektoren sind linear abhängig ?

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

◁

11.2 Lässt sich der Vektor $\boldsymbol{a}$ als Linearkombination $\sum_i \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ ausdrücken ?
Wenn ja, wie ?

a) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ◁

b) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

11.3 Bestimme den Rang folgender Vektorsysteme

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ d) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

◁

11.4 Zu bestimmen ist der Rang folgender Vektorsysteme $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$

a) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ◁

b) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

11.5 Bestimme den Rang folgender Matrizen!

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

◁

11.6 Berechne den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

◁

11.2 Determinanten

11.7 Berechne die Determinante!

a) $A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ b) $B_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$ c) $A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

d) $B_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ e) $A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ f) $B_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

◁

11.8 Mit den Matrizen A_i, B_i, $i = 1, 2, 3$, des Beispiels 11.7, sowie an Hand von allgemeinen (2×2)–Matrizen A und B zeige:

$$|AB| = |A|\,|B|$$

$\triangleleft$

11.9 Allgemein gilt $|A + B| \neq |A| + |B|$. Finde dazu ein Beispiel ! $\triangleleft$

11.10 Berechne mit Hilfe des Entwicklungssatzes folgende Determinanten !

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$\triangleleft$

11.11 Berechne die Determinanten !

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\triangleleft$

11.12 Berechne die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mit dem Entwicklungssatz ! $\triangleleft$

11.13 Berechne die Determinante der Matrix

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 5 & -1 & 3 & 5 & 7 & -5 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

◁

11.14 Löse das Gleichungssystem mit Hilfe der *Cramer*'schen Regel!

a) $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 0 & 7 & -1 \\ 4 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}$

◁

11.15 Das Modell eines Marktes für 2 Güter werde durch folgende Gleichung beschrieben (nach F. Pfuff)

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \gamma = 0 \qquad \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \delta = 0$$

Dabei seien P_1, P_2 die Preise der zwei Güter und α_1, α_2, β_1, β_2, γ, δ Konstante.

a) Bestimme mit Hilfe der *Cramer*'schen Regel den Gleichgewichtspunkt $(\overline{P}_1, \overline{P}_2)$, d.h. den Schnittpunkt der beiden Geraden!

b) Welche Bedingungen müssen die Konstanten erfüllen, damit eine Lösung existiert?

◁

11.16 Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A invertierbar?

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 2 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & \alpha \\ 2\alpha & 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}$

◁

11.17 Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das folgende Gleichungssystem eindeutig lösbar ?

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 3 & 1+\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 1+\alpha & 3 & 0 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gib jeweils eine Lösung an ! ◁

11.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Als Ergebnisse erhalten Sie nicht immer *schöne* Zahlen, verwenden Sie deshalb auch ein Computeralgebrasystem (CAS), um Ihre Ergebnisse zu *überprüfen*.

11.18 Für welche $\boldsymbol{x}$ gilt die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$? (händisch rechnen)

$$\text{a)}\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 9$$

$$\text{b)}\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = -3$$

◁

11.19 Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen !

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{c)}\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{d)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

◁

11.20 Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen und gebe deren algebraische und geometrische Vielfachheit an !

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{c)}\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

◁

11.21 Ist A eine symmetrische Matrix, so sind die zu verschiedenen Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren orthogonal. Überprüfen Sie das an

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$

◁

11.22 Zwei Matrizen A und B heißen ähnlich, wenn es eine Matrix U gibt, sodass $B = U^{-1}AU$. Es gilt: Ähnliche Matrizen haben gleiche Eigenwerte.

Berechne die zu A ähnliche Matrix B und überprüfe dieses Resultat für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

◁

11.23 Wenn eine quadratische Matrix A nur verschiedene Eigenwerte hat, und T die Eigenvektormatrix ist, dann ist $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix. Überprüfen Sie dies an

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

◁

11.24 Ist A eine symmetrische Matrix, T die Matrix der zugehörigen, normierten Eigenvektoren, dann ist T eine orthonormale Matrix, d.h., $T^{-1} = T^t$, und T^tAT ist eine Diagonalmartix. Überprüfen Sie dies an

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$

◁

11.25 Vergleichen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren auf Lage und Länge der folgenden Matrix A und ihrer Inversen!

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

◁

11.26 Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Was beobachten Sie? ◁

11.27 Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Wie interpretieren Sie diese und was stellt die Matrix dar? ◁

11.4 Anwendungen

11.28 Sie bearbeiten Punkte im 3-dimensionalen Raum. Geben Sie Transformationsmatrizen an für:

a) Translation in Richtung $(2, 3, -2)$ mit anschließender Rotation um die x-Achse um 45 Grad.

b) Rotation um die x-Achse um 45 Grad mit anschließender Translation in Richtung $(2, 3, -2)$.

c) Translation in Richtung $(2, 1, 0)$ mit anschließender Skalierung um 50%.

d) Skalierung um 50% mit anschließender Transformation in Richtung $(2, 1, 0)$.

◁

11.29 Sie bearbeiten Punkte im 2-dimensionalen Raum. Gegeben ist das Dreieck (0,0),(2,1),(1,2). Geben Sie die folgenden Transformationen als Matrix an und wenden Sie diese auf das Dreieck an.

a) Translation in Richtung $(2,3)$ mit anschließender Rotation um die z-Achse um 45 Grad.

b) Rotation um die z-Achse um 45 Grad mit anschließender Translation in Richtung $(2,3)$.

c) Translation in Richtung $(2,1)$ mit anschließender Skalierung um 50%.

d) Skalierung um 50% mit anschließender Transformation in Richtung $(2,1)$.

◁

11.30 Klassifizieren Sie die folgenden Kurven/Flächen zweiten Grades:

a) $x^2 - 2xy + y^2 = 16$

b) $2x^2 + 4xy = 12$

c) $3x^2 + 3y^2 - 2x - 14y = 13 - 10xy$

d) $7x^2 - 4xy - 8xz + 4y^2 + 4yz + 7z^2 + 2x - 4y + 16z + 18 = 0$

◁

11.31 Berechnen Sie die Koeffizienten β_i sowie die geschätzten Funktionswerte der folgenden Regression. Der funktionale Zusammenhang sei gegeben durch $f(x_1, x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ und Messwerte zeigen:

x_1	5	3	5	3
x_2	0.5	0.5	0.3	0.3
$f(x_2, x_2)$	1.7	3.3	6.5	3.0

◁

11.32 Folgende Stützpunkte sind gegeben:

i	x_i	f_i
0	0	3
1	1	1
2	2	-1
3	4	0
4	5	-2

Benütze das Interpolationsverfahren von Newton, um die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ zu bestimmen. ◁

11.5 Spezielle Matrizen

11.33 Welche Matrix R dreht einen Vektor um $90°$? – Es muss gelten:

$$R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

Vergleichen Sie das mit den Drehmatrizen aus der Vorlesung ! ◁

11.34 Welche $2 \times 2-$Matrix R dreht jeden zweidimensionalen Vektor um $45°$? ◁

11.35 Welche $2 \times 2-$Matrix vertauscht die Koordinaten x und y jedes zweidimensionalen Vektors ? ◁

11.36 Welche $3 \times 3-$Matrix permutiert (a, b, c) zu (c, a, b) ? Betrachten Sie den Vektor einmal als Zeilenvektor, einmal als Spaltenvektor. ◁

11.37 Welche geometrische Interpretationen finden Sie für die beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

◁

11.38 Versuchen Sie anhand des unten angegebenen Gleichungssystems $Ax = b$, das Gauß'sche Eliminationsverfahren durch Matrizenoperationen nachzubilden, d. h., die (erweiterte) Koeffizientenmatrix so mit entsprechenden Matrizen zu multiplizieren, dass das Eliminationsverfahren Schritt für Schritt nachvollzogen wird. Führen Sie sodann das Verfahren in einem Schritt durch, indem Sie die Koeffizientenmatrix mit nur einer Matrix multiplizieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \end{array}$$

◁

11.39 Dasselbe wie im letzten Beispiel für die Gauß-Jordan-Elimination zur Berechnung der Inversen A^{-1}. ◁

11.40 Zwei linear unabhängige Vektoren a und b im $\mathbb{R}^2$ spannen ein Parallelogramm auf, dessen Flächeninhalt mit Hilfe der Determinante der $2 \times 2-$Matrix $A = (a, b)$ berechnet werden kann. Vergleichen Sie diesen mit den Flächeninhalten der Parallelogramme zwischen $a + b$ und b, bzw., zwischen $a - b$ und b; zuerst anhand selbst gewählter Beispiele, dann allgemein. Was beobachten Sie? Warum? (Skizzen) ◁

11.41 Die von den Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramme haben denselben Flächeninhalt. Haben Sie eine Erklärung dafür? ◁