Lineare Geometrie der Ebene – LSG

Beispiele derselben Geraden in verschiedenen Notationen:

Schule: $y = kx + d$, also etwa $y = 2x - 3$, d.h., die Gerade hat Steigung $k = 2$ und Versatz $d = -2$ entlang der $y-$Achse.
Als lineare Gleichung (implizite Form): $2x - y - 3 = 0$ oder $2x - y = 3$.
Als inneres Produkt (Normalform): $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, hier ist $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ der Normalvektor der Geraden und $(1; -1)$ ein Punkt auf der Geraden, repräsentiert durch seinen Ortsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Wenn die inneren Produkte ausmultipliziert werden, ergibt sich wieder die Gerade in Form einer linearen Gleichung.
Hessesche Normalform: Wenn der Normalvektor normiert wird, d.h., auf Länge 1 gebracht wird, erhalten wir die Hessesche Normalform $\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 0$. Die Parameterform oder explizite Form: Mit Hilfe des Normalvektors finden wir leicht $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ der/ein Richtungsvektor der Geraden ist. Dieser steht normal auf den Normalvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Wir sehen das dadurch, dass innere Produkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ ist.

Es gilt: $\cos\alpha = \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1| \cdot |v_2|}$, oder etwas anders notiert $\cos\alpha = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{|v_1|\,|v_2|}$, wobei α der von den beiden Vektoren v_2 und v_2 eingeschlossene Winkel ist.

7.1 Finde zwei Geraden g_1 und g_2, die sich im Punkt (12,4) schneiden.

a) Gib diese Geraden in der impliziten Form[1] an.
$g_1 : x + y = 16$; $g_2 : x - y = 8$.

b) Gib diese Geraden in der expliziten Form[2] an.

$$g_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$g_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}.$$

c) Führe den Schnitt beider Geraden in der impliziten Form durch.

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 16 \\ x & - & y & = & 8 \\ \hline x & + & y & = & 16 \\ & & 2y & = & 8 \\ \hline & & y & = & 4 \\ & & x & = & 12 \end{array}$$

[1]Die normierte implizite Form heißt auch Hessesche Normalform (HNF).
[2]Die explizite Form heißt auch Parameterform.

d) Führe den Schnitt beider Geraden in der expliziten Form durch.
$\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entweder sehen wir hier gleich, dass $\lambda = \mu = 0$ die Lösung $\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$ ergibt, oder wir trennen die Gleichung in zwei lineare Gleichungen zeilenweise auf, führen dann ein Gauß'sches Eliminationsverfahren durch, und erhalten dieselbe Lösung $\lambda = \mu = 0$ und setzen diese in die Parameterform(en) ein.

e) Führe ein Gauß'sches Eliminationsverfahren ohne Verwendung von Variablen(namen) durch.

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 16 \\ 1 & 1 & 8 \\ \hline 1 & 1 & 16 \\ 0 & 2 & 8 \\ \hline 1 & 1 & 16 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}$$

f) Welchen Winkel schließen die Geraden mit der x-Achse ein?
Wir nehmen die Richtungsvektoren der Geraden und den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ der $x-$Achse. $\cos \alpha_1 = \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, also $\alpha_1 = 45°$. Analog $\alpha_2 = 45°$. Hier haben wir ausschließlich die Innenwinkel betrachtet.

g) Welchen Winkel schließen die Geraden mit der y-Achse ein?
Wir nehmen die Richtungsvektoren der Geraden und den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der $y-$Achse und erhalten $\alpha_1 = 45°$ und $\alpha_2 = 45°$.

h) Welchen Winkel schließen die Geraden untereinander ein?
$90°$

i) Finde eine Gerade g_3, die durch den gleichen Schnittpunkt geht.
Etwa einfach $g_3 : \ y = 4$.

j) Finde eine Gerade g_4, die mit der x-Achse einen Winkel von $45°$ einschließt und durch den angegebenen Schnittpunkt geht.
Einfach $g_4 = g_2$.

k) Finde eine Gerade g_5, die die Steigung $\frac{7}{4}$ hat und durch den angegebenen Schnittpunkt geht.
$y = \frac{7}{4}x - 17$.

l) Finde eine Gerade g_6, die durch den Ursprung und durch den angegebenen Schnittpunkt geht.
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$.

m) Berechne den (Normal-) Abstand des Ursprungs zur Geraden g_4.
Wir setzen den Punkt (0;0) in die Hessesche Normalform ein und erhalten $\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-12+4)$, also als Abstand $4\sqrt{2} \approx 5.66$.

n) Berechne den (Normal-) Abstand des Punktes (1,1) zur Geraden g_4.
Über die HNF erhalten wir $d = |\frac{1}{\sqrt{2}}(-11+3)| = 4\sqrt{2}$.

o) Gib eine zu g_1 parallele Gerade an. Welchen (Normal-) Abstand haben die beiden Geraden?
Etwa $g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Setze nun den Punkt (0;4) in die HNF von g_1 ein und erhalte $d = |\frac{1}{\sqrt{2}}(-12+0)| = 6\sqrt{2} \approx 8.49$.

◁

7.2 Verwende die Geraden g_1 und g_2 aus dem letzten Beispiel und führe das Gauß'sche Eliminationsverfahren durch. Zeichne die durch die Eliminationsschritte entstehende(n) neue(n) Gerade(n) in eine Skizze ein.
Es sind dies die Geraden $y = 4$ im ersten Schritt und $x = 12$ im zweiten Schritt. ◁

7.3 Finde zwei Geraden g_1 und g_2, die sich im Punkt (A,B) schneiden und führe alle Berechnungen des obigen Beispiels durch. A und B sind hierbei reelle Zahlen, die Berechnung muss aber mit den allgemeinen Parameternamen A und B erfolgen.

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & A+B \\ x & - & y & = & A-B \\ \hline x & + & y & = & A+B \\ & & 2y & = & 2B \\ \hline & & y & = & B \\ & & x & = & A \end{array}$$

◁