Relationen und Ordnungen

5.1 a) Gib die Potenzmengen zu $A = \{a, b\}$ und zu $B = \{-, *, +\}$ an!

b) Wieviele Elemente hat die Potenzmenge von $C = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m\}$?

◁

5.2 Gegeben seien die Mengen A, B und C

$$A = \{a, b, c, d\}; \qquad B = \{1, 2, 3, 4\}; \qquad C = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$$

Gib folgende Produktmengen an:

a) $A \times C$ b) $C \times A$
c) $A \times B$ d) $A \times A$

◁

5.3 Sei A das abgeschlossene Intervall $[2, 3] \subseteq \mathbb{R}$, $B = \{4\}$ und die Menge C das offene Intervall $]1, 2[\subseteq \mathbb{R}$. Stelle das kartesische Produkt $(A \cup B)$ x C in der reellen Zahlenebene graphisch dar! ◁

5.4 Sei $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\}$. Wie sieht die graphische Darstellung von R in der reellen Zahlenebene aus? ◁

5.5 Welche der folgenden geordneten Paare genügen den entsprechenden (binären) Relationen auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

a) $x \, \rho \, y \Leftrightarrow x = y + 1;$ $(2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2)$

b) $x \, \rho \, y \Leftrightarrow x$ teilt y; $(2, 4), (2, 5), (2, 6)$

c) $x \, \rho \, y \Leftrightarrow x$ ist ungerade ; $(2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)$

d) $x \, \rho \, y \Leftrightarrow x > y^2;$ $(1, 2), (2, 1), (5, 2), (6, 4), (4, 3)$

◁

5.6 Welche der folgenden geordneten Paare genügen den entsprechenden (binären) Relationen auf $S \times S$?

a) $S = \mathbb{Z};$ $x \, \rho \, y \Leftrightarrow x = -y;$ $(1, -1), (2, 2), (-3, 3), (-4, -4)$

b) $S = \mathbb{Q};$ $x \, \rho \, y \Leftrightarrow x \leq 1/y;$ $(1, 2), (-3, -5), (-4, 1/2), (1/2, 1/3)$

◁

5.7 Welche der folgenden (binären) Relationen auf der entsprechenden Menge S sind reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv?

a) $S = \mathbb{N};\quad x\,\rho\,y \Leftrightarrow x + y$ ist gerade

b) $S = \mathbb{N};\quad x\,\rho\,y \Leftrightarrow x$ teilt y

c) $S = \mathbb{N};\quad x\,\rho\,y \Leftrightarrow x = y^2$

d) $S = \{0,1\};\quad x\,\rho\,y \Leftrightarrow x = y^2$

e) $S = \mathbb{Q};\quad x\,\rho\,y \Leftrightarrow |x| \leq |y|$

f) $S = \mathbb{Z};\quad x\,\rho\,y \Leftrightarrow x - y$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von 3

g) $S = \mathbb{N};\quad x\,\rho\,y \Leftrightarrow x$ ist ungerade

◁

5.8 Finde eine Menge S und eine (binäre) Relation ρ auf S, für die gilt:

a) ρ ist reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv

b) ρ ist reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch

c) ρ ist nicht reflexiv und nicht symmetrisch, aber transitiv

d) ρ ist reflexiv, aber weder symmetrisch noch transitiv

◁

5.9 Betrachte die Relation „x teilt y“ auf der Menge $\{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$

a) Gib die geordneten Paare (x, y) dieser Relation an!

b) Welche Vorgänger hat 6?

c) Welche unmittelbaren Vorgänger hat 6?

d) Zeige, dass dies eine Partialordnung definiert!

e) Zeichne einen Graphen, der diese Partialordnung beschreibt!

◁

5.10 Zeichne einen Graphen für die Partialordnung „x teilt y“ auf der Menge $S = \{2, 3, 5, 7, 21, 42, 105, 210\}$!
Gibt es Teilmengen von S die total geordnet sind? Wenn ja, welche? ◁

Bemerkung: Die Äquivalenzklassen $K(a) = \{b \mid a\rho b\}$ der Äquivalenzrelation ρ auf A bilden eine Partition der Menge A.

5.11 Sei $M = \{1,2,3,4\}$ und $P(M)$ ihre Potenzmenge. Betrachte die folgende Äquivalenzrelation R: $(A,B) \in R \;\Leftrightarrow\; |A \setminus B| = |B \setminus A|$, $A,B \in P(M)$. Gib jene Äquivalenzklasse bezüglich R an, in der das Element $\{1,2\} \in P(M)$ liegt! ◁

5.12 Beschreibe für jede der folgenden Äquivalenzrelationen die entsprechenden Äquivalenzklassen!

a) $S = \mathbb{N}; \quad x\,\rho\,y \Leftrightarrow x = y$

b) $S = \{1,2,3\};\ \rho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$

◁

5.13 Gegeben ist die Relation $R = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$ in $A = \{1,2,3\}$, d. h., $R \in A \times A$. Ist R eine Äquivalenzrelation ? ◁

5.14 Welche der Relationen aus Beispiel 5.7 ist eine Äquivalenzrelation?
Beschreibe die dazugehörigen Äquivalenzklassen! ◁

5.15 Sei $S = \{\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ die Menge aller Brüche.
Zwei Brüche heißen genau dann äquivalent ($\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$), wenn $ad = bc$ gilt.

a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist!

b) Wie sehen die Äquivalenzklassen aus? (z.B. $[1/2]$)

◁

5.16 Sei $S = \mathbb{Z}$, x ist kongruent modulo 4 zu y ($x \equiv_4 y$), genau dann, wenn $x - y$ ein ganzzahliges Vielfaches von 4 ist.

a) Zeige, dass $\equiv_4$ eine Äquivalenzrelation ist!

b) Wie sehen die Äquivalenzklassen aus?

◁

5.17 Gib ein Beispiel einer dreistelligen Relation $R \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3$, bei der A_1 eine Menge von Namen, A_2 eine Menge von Adressen und A_3 eine Menge von Telefonnummern ist! Stelle diese Relation in einer 3-dimensionalen Skizze perspektivisch dar! ◁