Grundlagen

1.1 Beschreibe die Menge $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ formal! ◁

1.2 Gib eine kurze Formel für die Menge aller *echten* Brüche an, d. h. für Brüche, die keine ganzen Zahlen sind! ◁

1.3 Es sei
A die Menge der Radfahrer/innen
B die Menge der Schiläufer/innen
C die Menge der Tennisspieler/innen

a) Drücke in Worten aus:

$$A\setminus(B \cup C) \qquad \text{und} \qquad (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

b) Wie lautet die Symbolschreibweise für die Menge der Personen, die genau eine Sportart betreiben?

◁

1.4 Beweise und illustriere durch Venn-Diagramme!

a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

◁

1.5 $A\Delta B = (A\setminus B) \cup (B\setminus A)$ ist die *symmetrische Differenz* von A und B. Gib $(A\Delta B)\Delta C$ unter Verwendung der Operationen $\cup, \cap, \setminus$ an! Veranschauliche durch Venn-Diagramme! ◁

1.6 Beweise oder widerlege: $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\setminus C)$! ◁

1.7 Zeige:

a) $A \Delta B = \{\} \iff A = B$

b) $A \Delta B = A \cup B \iff A \cap B = \{\}$

Bemerkung: $\iff$ steht für *genau dann, wenn* (englisch: *iff*). $\triangleleft$

1.8 Seien A, B und C Mengen. Zeige:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\triangleleft$

1.9 Seien A, B und C Mengen. Erkläre, warum:

a) $(A \cap B) \backslash C = (A \backslash C) \cap (B \backslash C)$

b) $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

c) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$\triangleleft$

1.10 Es ist $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

$$\text{Zeige:} \quad (A \times B)^c = (A^c \times B) \cup (A \times B^c) \cup (A^c \times B^c) \ .$$

$\triangleleft$

1.11 Gegeben seien die Mengen A, B, und C

$A = \{a, b, c, d, \} \qquad B = \{1, 2, 3, 4\} \qquad C = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$

Berechne

a) $A \times B$	b) $C \times A$	c) $C \times B$
d) $A \times C$	e) $A \times A$	f) $C \times C$

$\triangleleft$

1.12 Beweise mittels vollständiger Induktion

a) $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$

c) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

◁

1.13 Beweise folgende Summenformeln mittels vollständiger Induktion:

a) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ b) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\dfrac{n(n+1)}{2})^2$

◁

1.14 Zeige, dass gilt: $2^n > n^2$ für $n > n_0$ ◁

1.15 Für $h > -1$ gilt: $(1+h)^n \geq (1+nh)\ \forall n$ ◁

1.16 Zeige, dass mit $\alpha_i > 0\ (i = 1, \ldots, n)$ für $n > 1$ gilt:

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_n) > 1 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)$$

◁

1.17 Sei $\alpha_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_n + 1 = a_n + a_{n-1}$ für $n \geq 1$.
Zeige

a) $\sum_{i=1}^{k} a_i = a_{k+2} - 1$ b) $\sum_{i=1}^{k} a_1^2 = a_k a_{k+1}$

c) $\sum_{i=1}^{k} a_{2i-1} = a_{2k}$ d) $a_{k+1}^2 - a_{k-1}^2 = a_{2k}$

e) $\sum_{i=1}^{k} a_{2i} = a_{2k+1} - 1$

◁