

Einheit 11 - Graphen

Bevor wir in medias res (eigentlich heißt es *medias in res*) gehen, eine Zusammenfassung der wichtigsten Definitionen und Notationen für Graphen.

Graphen bestehen aus Knoten (*vertex, vertices*) und Kanten (*edge(s)*) und einer Funktion, die jeder Kante ein Paar von Knoten zuordnet. Ein Graph G kann daher durch die Mengen $V(G)$ und $E(G)$ und einer Funktion f gegeben sein. Kanten können gerichtet sein, (x, y) ist etwa die Kante von Knoten x nach Knoten y , oder ungerichtet, $\{x, y\}$ ist die (ungerichtete) Kante zwischen x und y . Im Folgenden werden wir aber die Notation (x, y) für ungerichtete, und $\langle x, y \rangle$ für gerichtete Kanten verwenden, da sie einfacher ist.

Ein gerichteter Graph besitzt nur gerichtete Kanten, ein ungerichteter nur ungerichtete. Treten beide Arten von Kanten auf, so heißt der Graph gemischt.

Es kann in einem Graphen auch Schlingen und Mehrfachkanten geben. Ein schlichter (oder einfacher) Graph hat weder Schlingen noch Mehrfachkanten.

Ein vollständiger Graph hat zwischen jedem seiner Knotenpaare eine Kante, d. h., bei n Knoten hat er $\binom{n}{2}$ Kanten und wird mit C_n bezeichnet. Der kantenlose oder leere Graph hat keine Kanten. Die Kantendichte ist das Verhältnis von Kantenzahl zu Anzahl der Kanten im zugehörigen Maximalgraphen bei gegebener Knotenmenge, d. h., $|E|/\binom{n}{2}$. Graphen mit hoher Kantendichte heißen dicht (*dense*), die mit geringer spärlich (*sparse*).

Den Schatten eines Graphen erhalten wir, indem wir je zwei entgegengesetzt gerichtete Kanten durch eine ungerichtete ersetzen, und alle weiteren gerichteten ebenfalls durch ungerichtete.

Ein Teilgraph ist eine Teilmenge eines Graphen. Mit jeder Kante, die im Teilgraph aufscheint, müssen auch die Endknoten aufscheinen. Enthält ein Teilgraph alle Knoten des Originals, so heißt er spannender Teilgraph. Enthält ein Teilgraph mit den Knoten auch alle Kanten auf dieser Knotenmenge, so heißt er gesättigter oder aufgespannter Teilgraph.

Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, heißen benachbart oder adjazent. Die Endknoten einer Kante heißen zu dieser Kante inzident.

Graphen (gerichtete oder ungerichtete) mit n Knoten und k Kanten können sowohl durch eine $n \times k$ Inzidenzmatrix \mathcal{B}_G (falls ein gerichteter Graph vorliegt, darf er keine Schlingen enthalten), als auch durch eine $n \times n$ Adjazenzmatrix \mathcal{A}_G beschrieben werden.

Ungerichteter Graph	
$\mathcal{B}_G = (b_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,k}}$	$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & v_j \text{ inzident zu } e_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
$\mathcal{A}_G = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$	$a_{i,j} = \begin{cases} r & r \text{ Kanten zwischen } v_i \text{ und } v_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
Gerichteter Graph	
$\mathcal{B}_G = (b_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,k}}$	$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & e_j \text{ beginnt in } v_i \\ -1 & e_j \text{ endet in } v_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
$\mathcal{A}_G = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$	$a_{i,j} = \begin{cases} r & r \text{ Kanten von } v_i \text{ nach } v_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Die Anzahl $d^+(v_i)$ der von einem Knoten v_i wegführenden Kanten heißt Outdegree, die Anzahl $d^-(v_i)$ der zu dem Knoten hinführenden Kanten heißt Indegree. Bei ungerichteten Graphen ist $d(v_i)$ die Anzahl der mit v_i inzidenten Kanten der Grad des Knoten.

Es gilt:

$$d^+(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad d^-(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} \quad d(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ji}$$

Ist $d^+(v) = 0$, so heißt v Senke, ist $d^-(v) = 0$, so heißt v Quelle.

Betrachten wir Kantenfolgen von v_a nach v_e , das sind Folgen von aneinander anschließenden Kanten, die vom Anfangsknoten v_a bis zum Endknoten v_e durchlaufen werden kann. Ist der Anfangs- gleich dem Endknoten, so heißt die Kantenfolge geschlossen, andernfalls heißt sie offen.

Eine Kantenfolge, in der keine Kante mehrfach auftritt heißt Kantenzug. Ein Weg ist eine offen Kantenfolge, in der kein Knoten mehrfach auftritt. Ein Zyklus oder Kreis ist eine geschlossene Kantenfolge, in der kein Knoten mehrfach vorkommt (außer Anfangs- und Endknoten). Die Anzahl der Kanten in einer Kantenfolge heißt Länge. Ein Knoten v_i heißt in k Schritten von v_j aus erreichbar, wenn es eine Kantenfolge der Länge k von v_j nach v_i gibt.

Ein ungerichteter Graph heißt zusammenhängend, wenn jeder Knoten des Graphen von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist. Die zusammenhängenden gesättigten Teilgraphen eines Graphen heißen Zusammenhangskomponenten des Graphen.

Ein gerichteter Graph heißt stark zusammenhängend, wenn jeder Knoten des Graphen von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist. Er heißt schwach zusammenhängend, wenn sein Schatten zusammenhängend ist.

BEMERKUNG: Es gibt eine Kantenfolge der Länge s von v_i nach v_j wenn das Element $a_{ij}^{(s)} > 0$, mit $\mathcal{A}_G^s = (a_{ij}^{(s)})$.

BEMERKUNG: Ein Knoten v_j ist von v_i aus erreichbar, wenn der Eintrag $r_{ij} > 0$, wobei die Erreichbarkeitsmatrix $R = (r_{ij}) = (\max(a_{ij}^{[0]}, \dots, a_{ij}^{[n-1]}))$ ist,

$$\text{mit } a_{ij}^{[k]} = \begin{cases} 1 & \text{falls } a_{ij}^{(k)} > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Distanz $d(v_i, v_j)$ zweier Knoten in einem zusammenhängenden Graphen ist die Länge des kürzesten Weges zwischen den beiden Knoten.

Eine Euler'sche Linie enthält jeden Knoten mindestens einmal, jede Kante genau einmal. Eine Hamilton'sche Linie enthält jeden Knoten genau einmal. Geschlossene Euler'sche bzw. Hamilton'sche Linien sind solche, die einen geschlossenen Kantenzug bilden.

Kreisfreie, gerichtete Graphen heißen azyklisch. Ein ungerichteter, kreisfreier Graph heißt Wald. Ein zusammenhängender Wald heißt Baum. Ein Knoten vom Grad 1 eines Baumes heißt Blatt oder Endknoten.

Ein Teilgraph, der alle Knoten eines zusammenhängenden ungerichteten Graphen enthält und zusätzlich ein Baum ist, nennen wir spannenden Baum oder Gerüst.

Graphen, die in den folgenden Beispielen verwendet werden und dort nicht explizit angegeben werden, finden sich am Ende dieses Abschnitts.

- 11.1 Graph G_1 gegeben durch: $V(G_1) = \{1, 2, \dots, 8\}$, $E(G_1) = \{ \langle x, y \rangle \mid x \text{ teilt } y, x < y \}$
 Graph G_2 gegeben durch: $V(G_2) = \{1, 2, \dots, 5\}$, $E(G_2) = \{ \langle x, y \rangle \mid x < y \leq x + 3 \}$
 Bestimme und zeichne $G_1 \cap G_2$ und $G_1 \cup G_2$! ◁
- 11.2 Graph G_1 gegeben durch: $V(G_1) = \{1, 2, \dots, 7\}$, $E(G_1) = \{ \langle x, y \rangle \mid x < y \leq x + 2 \}$
 Graph G_2 gegeben durch: $V(G_2) = \{1, 2, \dots, 9\}$, $E(G_2) = \{ \langle x, y \rangle \mid x \text{ teilt } y, x < y \}$
 Bestimme und zeichne $G_1 \cap G_2$ und $G_1 \cup G_2$! ◁
- 11.3 Bestimme alle Quadrupel (a, b, c, d) , $a, b, c, d \in \{1, 2, \dots, 7\}$, sodass der von den Knoten a, b, c, d in G_1 aufgespannte (vollständige) Teilgraph mit G_2 identisch ist! ◁

- 11.4 Bestimme alle Quadrupel (a, b, c, d) , $a, b, c, d \in \{1, 2, \dots, 7\}$, sodass der von den Knoten a, b, c, d in G_3 aufgespannte Teilgraph mit G_4 identisch ist! \triangleleft
- 11.5 Bestimme die Adjazenzmatrizen \mathcal{A}_{G_1} , \mathcal{A}_{G_2} , $\mathcal{A}_{G_1 \cap G_2}$ und $\mathcal{A}_{G_1 \cup G_2}$ für die Graphen aus Beispiel ?? bzw. ??! \triangleleft
- 11.6 Bestimme die Adjazenzmatrizen \mathcal{A}_{G_1} und \mathcal{A}_{G_3} , sowie die Potenzen $\mathcal{A}_{G_1}^2$, $\mathcal{A}_{G_1}^{[2]}$, $\mathcal{A}_{G_3}^2$ und $\mathcal{A}_{G_3}^{[2]}$! \triangleleft
- 11.7 Bestimme die Adjazenzmatrix \mathcal{A}_{G_5} , sowie (mit deren Hilfe) die Anzahl der gerichteten Kantenfolgen der Länge 3 von Knoten 4 nach 6! \triangleleft
- 11.8 Entferne aus dem vollständigen (ungerichteten) Graphen mit der Knotenmenge $\{1, \dots, 5\}$ die Kanten $(3, 5)$ und $(4, 5)$.
- Stelle den resultierenden Graphen G durch seine Adjazenz- und Inzidenzmatrix dar, wobei im Fall der Inzidenzmatrix die Kanten (i, j) gemäß der Relation

$$(i, j) \text{ vor } (i', j') \quad - \quad (i < i' \vee (i = i' \wedge j < j'))$$
 anzuordnen sind!
 - Enthält G eine geschlossene Euler'sche Linie? Gib diese an bzw. begründe warum, falls keine solche existiert!
 - Gib eine geschlossene Hamilton'sche Linie in G an!
- \triangleleft
- 11.9 Sei H_5 der Graph, der aus G_5 durch Umdrehen aller Kantenrichtungen entsteht. Bestimme die Adjazenzmatrix \mathcal{A}_{H_5} , sowie (mit deren Hilfe) die Anzahl der gerichteten Kantenfolgen der Länge 3 von Knoten 4 nach 6! \triangleleft
- 11.10 Gegeben sei die Adjazenzmatrix A (mit Mehrfachkanten)
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
- Zeichne einen dazu gehörigen ungerichteten Graphen mit den Knoten $\{1, 2, 3, 4\}$!
 - Berechne A^2 !
 - Finde 5 verschiedene Pfade von 4 nach 4 der Länge 2!
 - Berechne die Erreichbarkeitsmatrix R !
- \triangleleft

- 11.11 Der 3-dimensionale Hypercube H_3 ist durch folgende Knotenmenge und Kantenmenge gegeben:
- Knoten: $V(H_3) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3\}$
- Kanten: $E(H_3) = \{(x, y) \mid \text{genau zwei Komponenten von } x \text{ und } y \text{ stimmen \u00fcberein}\}$

Ermittle f\u00fcr H_3 die durchschnittliche Distanz der sieben Knoten $x \neq (0, 0, 0)$ zum Knoten $(0, 0, 0)$.

Hinweis: Fasse die Knoten als Punkte im \mathbb{R}^3 auf und zeichne diese! \u25c4

- 11.12 Zeichne zwei verschiedene ungerichtete zusammenh\u00e4ngende Graphen mit der Knotenmenge $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, die geschlossenen Euler'sche Linien enthalten, und gib deren Adjazenzmatrizen und Inzidenzmatrizen an! \u25c4

- 11.13 Gegeben sei der Graph G_{15} .

- a) Welche Knoten sind von 3 aus erreichbar?
- b) Bestimme die L\u00e4nge des k\u00fcrzesten Pfades von 3 nach 6!
- c) Bestimme einen Pfad der L\u00e4nge 8 von 1 nach 6!

\u25c4

- 11.14 Der gerichtete Graph $G = (V, E)$ sei durch

$$V = \{1, \dots, 6\} \quad \text{und} \quad E = \{(i, j) \mid i, j \in V, 2i + j \leq 6\}$$

gegeben.

- a) Zeichne G !
- b) Gib die Adjazenzmatrix von G an!
- c) Ist G ein schlichter Graph? – Begr\u00fcndung!
- d) Gib die schwachen Zusammenhangskomponenten von G an!
- e) Betrachte den von $V' = \{1, 2\}$ aufgespannten Teilgraphen G' von G ! Enth\u00e4lt G' eine geschlossene Euler'sche Linie? – Begr\u00fcndung!

\u25c4

11.15 Gegeben sei der Graph G_{24} .

- a) Bestimme die Adjazenzmatrix von G !
- b) Gib die Indegrees und Outdegrees der Knoten von G an!
- c) Zeichne den Schatten von G !

◁

11.16 **Programm: Distanzmatrix.** Schreibe ein Programm, das die Distanzmatrix D eines gegebenen zusammenhängenden gerichteten Graphen berechnet und ausgibt, d. h., jene Matrix $D = (d_{ij})_{i,j}$, in der d_{ij} die Distanz von Knoten i zu Knoten j ist, d. h., die Länge des kürzesten Weges von i nach j !

Anleitung: Es soll die Adjazenzmatrix A_G des Graphen eingegeben werden. Verwende weiters die in der Vorlesung gegebene Interpretation der Potenzen A_G^n von A_G ! ◁

11.17 **Programm: Euler'sche Linie.** Schreibe ein Programm, das einen durch seine Adjazenzmatrix A_G gegebenen gerichteten Graphen G durch Hinzufügen von beliebigen Kanten so erweitert, dass er eine geschlossene Euler'sche Linie enthält! ◁

11.18 **Programm: Topologische Knotensortierung.** Eine *topologischen Knotensortierung* ist eine Nummerierung der Knoten eines gegebenen azyklischen gerichteten Graphen G , sodass $v \in V$ stets eine kleinere Nummer als $w \in V$ bekommt, wenn es einen Weg von v nach w gibt.

Implementiere folgenden Algorithmus zur topologischen Knotensortierung:

Solange Knoten nicht nummeriert

{

- Nummeriere Quellen von G mit der kleinsten noch freien Nummer
- Entferne die soeben nummerierten Quellen und die von ihnen wegführenden Kanten aus G

}

◁

11.19 **Programm: Zyklische Graphen.**

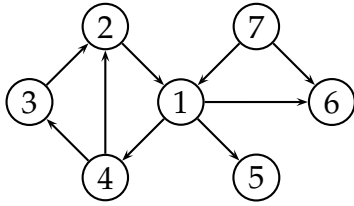
- a) Schreibe ein Programm, das von einem gegebenen Graphen bestimmt, ob er zyklisch oder azyklisch ist!
- b) Schreibe ein Programm, das von einem gegebenen Graphen bestimmt, ob er kreisfrei ist! Weiters soll es die Menge der erreichbaren Knoten ausgeben.

◁

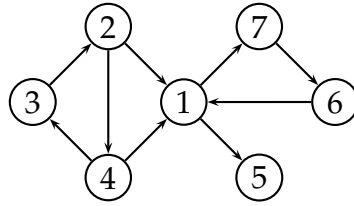
- 11.20 Gegeben sei der Graph G_{16} .
- Bestimme die Anzahl der Pfade der Länge 3 von 5 nach 2 direkt!
 - Bestimme die Anzahl der Pfade der Länge 3 von 5 nach 2 mit Hilfe der Matrix $\mathcal{A}_{G_{16}}^3$!
- ◁
- 11.21 Bestimme für die Graphen G_6 , H_6 und G_{17} (wobei H_6 durch Umkehren aller Kantenrichtungen aus G_6 entsteht) die entsprechenden Erreichbarkeitsmatrizen \mathcal{R} !
- ◁
- 11.22 Zeige für den Graphen G_{15} mit Hilfe der Erreichbarkeitsmatrix, dass die Knoten 1 und 2 von 3 aus nicht erreichbar sind!
- ◁
- 11.23 Bestimme die starken Zusammenhangskomponenten für die Graphen G_1 , G_3 , G_5 , G_7 und H_7 (wobei H_7 durch Umkehren aller Kantenrichtungen aus G_7 entsteht)!
- ◁
- 11.24 Untersuche, ob die Graphen G_{14} , G_{18} , G_{19} , G_{20} , G_{21} , G_{22} , G_{23} eine geschlossene Euler'sche Linie besitzen und bestimme gegebenenfalls eine solche!
- ◁
- 11.25 Untersuche, ob die Graphen G_{14} , G_{18} , G_{19} , G_{20} , G_{21} , G_{22} , G_{23} eine geschlossene Hamilton'sche Linie besitzen und bestimme gegebenenfalls eine solche!
- ◁
- 11.26 Bestimme in den Graphen G_5 und H_5 (entstanden durch Umkehrung aller Kantenrichtungen aus G_5) die Anzahl der Zyklen der Länge 3, auf denen der Knoten 4 liegt!
- ◁
- 11.27 Bestimme in den Graphen G_9 und G_{10} die Anzahl der Dreiecke (Kreise der Länge 3)!
- ◁
- 11.28 Untersuche die Graphen G_7 , G_8 , G_{11} und H_{11} (entstanden durch das Umkehren aller Kantenrichtungen aus G_{11}) mit dem Markierungsalgorithmus auf Azyklizität!
- ◁
- 11.29 Bestimme alle Knotenbasen der Graphen G_1 , G_3 , G_5 , G_7 und H_7 (entstanden durch das Umkehren aller Kantenrichtungen aus G_7)!
- ◁

Graphen $G_1 - G_{24}$ zu den Beispielen

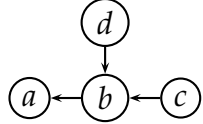
G_1 :



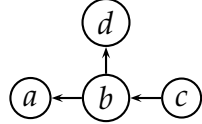
G_3 :



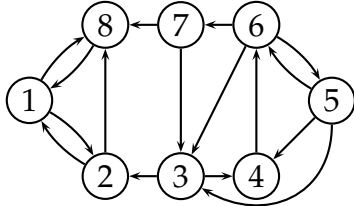
G_2 :



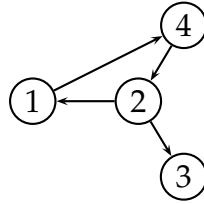
G_4 :



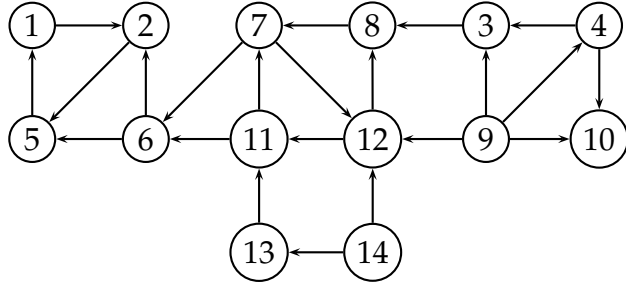
G_5 :



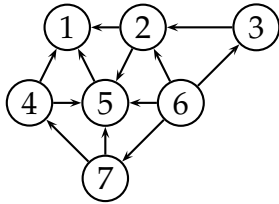
G_6 :



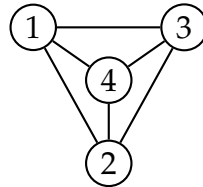
G_7 :



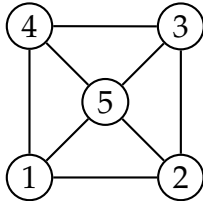
G_8 :



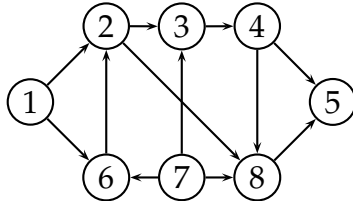
G_9 :



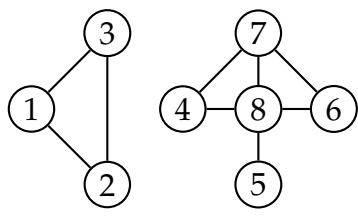
G_{10} :



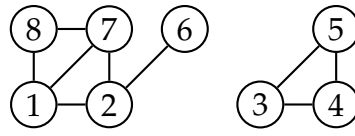
G_{11} :



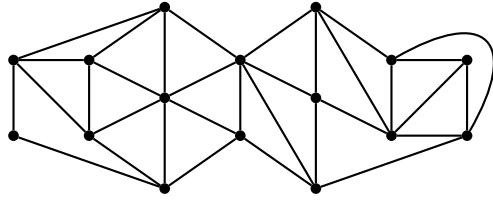
G_{12} :



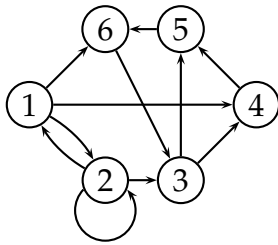
G_{13} :



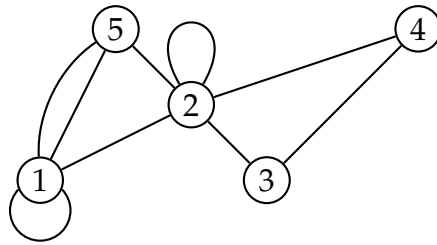
G_{14} :



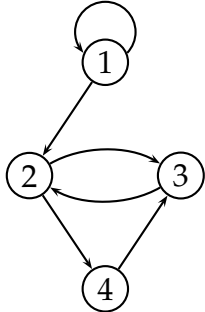
G_{15} :



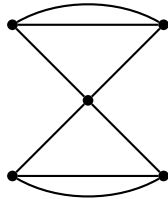
G_{16} :



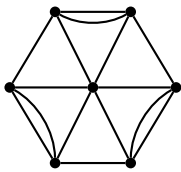
G_{17} :



G_{18} :



G_{19} :



G_{20} :

