

Numerik (Einheit 7)

7.1 Seien a, b, c in Gleitkommadarstellung mit 8 Stellen gegeben:

$$\begin{aligned}a &= 0.23371258 \cdot 10^{-4} \\b &= 0.33678429 \cdot 10^2 \\c &= -0.33677811 \cdot 10^2\end{aligned}$$

Zeige, dass $(a \oplus b) \oplus c$ und $a \oplus (b \oplus c)$ nicht gleich sind. Welches der beiden Ergebnisse ist genauer? Warum? ◁

7.2 Seien

$$\begin{aligned}x &= 0.0345 \\y &= 29 \\z &= 2\end{aligned}$$

Bringe x, y, z in Gleitkommadarstellung mit Mantissenlänge 4 und zeige:

$$(x \odot y) \odot z \neq x \odot (y \odot z)$$

Welches der beiden Ergebnisse ist genauer? ◁

7.3 Bestimme die Konditionszahlen für die Lösungsformel der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0!$

Anleitung: Betrachte die Funktion $\Phi(p, q) = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ ◁

7.4 Berechne die Konditionszahlen für die folgenden Ausdrücke:

a) $\Phi(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$

b) $\Psi(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$

c) $\Phi(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$

d) $\Psi(x) = \frac{2 \sin^2(x/2)}{x}$

◁

7.5 Untersuche, ob die Funktion $f(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2^2)$ im Bereich

$$B = \left\{0 \leq x_1 \leq \frac{1}{4}, 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{4}\right\}$$

eine Kontraktion ist! ◁

7.6 Zeige: Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ ist keine Kontraktion! ◁

7.7 Untersuche, ob die Funktion $f(x) = \int_0^x e^{-z} dz$, $x \geq 0$ Kontraktion ist. ◁

7.8 Führe die Lösung der folgenden Gleichungen auf Fixpunktaufgaben zurück!

a) $3x^2 + 4x - 2 = 0$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

◁

7.9 Führe die folgenden Minimierungsaufgaben auf Fixpunktaufgaben zurück!

a) $\frac{x^3 - x}{x^2 + 1} = \min$

b) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \min$

◁

7.10 Die Funktion $f(x) = x^4 - \frac{7}{3}x^2$ hat Nullstellen bei $x = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$

Zeige: Das Newton-Raphson-Verfahren konvergiert nicht, falls bei $x_0 = 1$ „in der Nähe“ der Nullstelle gestartet wird. (Skizze!) ◁

7.11 Führe das Newton-Raphson-Verfahren für die Funktion $f(x) = x^3 - x + 1$ durch. ◁

7.12 Berechnen sie den Fixpunkt von $f(x) = \cos(x)$ numerisch. ◁

7.1 Numerische Behandlung von Matrizen

7.13 Vergleiche das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren anhand des Problems

$$Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wähle $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, iteriere bis $n = 5$. ◁

7.2 Numerisches Integrieren

7.14 Bestimme $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx$ durch die zusammengesetzte Sehnentrapezregel. Unterteile das Intervall $[0, \pi/2]$ in $m = 2, 4$ und 8 Intervalle. Schätze den Fehler ab. Wie groß muss m sein, damit der Fehler kleiner als 10^{-6} wird? \triangleleft

7.15 Berechne mit Hilfe der zusammengesetzten Tangententrapezregel ($h=1/4$)

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx .$$

\triangleleft

7.16 Berechne mit Hilfe der zusammengesetzten Simpsonregel

$$\int_0^{\pi} e^{\sin x} dx$$

und schätze den Fehler ab ($h = \pi/2$). \triangleleft

7.3 Integrieren – Wiederholung

7.17 Berechne die unbestimmten Integrale $\int f(x) dx$; $a, b, c \in \mathbb{R}$:

| | | |
|---------------------------|----------------------------------|----------------------------|
| a) $f(x) = x^3$ | b) $f(x) = \frac{1}{x}$ | c) $f(x) = \frac{ax+b}{x}$ |
| d) $f(x) = 1 - x^2 + x^4$ | e) $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$ | f) $f(x) = \sqrt{x}$ |

\triangleleft

7.18 Berechne mit Hilfe der Substitutionsmethode!

| | |
|-----------------------------|--|
| a) $\int \sqrt{3x-2} \, dx$ | b) $\int (4x+2) \sqrt[3]{2x^2+2x-1} \, dx$ |
| c) $\int \cos(4x+3) \, dx$ | |

\triangleleft

7.19 Integriere durch Substitution $\log x = u$!

| | |
|----------------------------------|---------------------------------|
| a) $\int \frac{\log x}{x} \, dx$ | b) $\int \frac{1}{1+e^u} \, du$ |
| c) $\int \frac{dx}{x \log x}$ | d) $\int \frac{1}{1-e^u} \, du$ |

\triangleleft

7.20 Berechne folgende bestimmte Integrale durch Substitution!

a) $\int_0^\pi \frac{x}{3} dx$ b) $\int_3^6 \frac{1}{9+16x^2} dx$ c) $\int_0^1 \frac{4}{\sqrt{4-2x^2}} dx$
d) $\int_0^1 \sqrt[3]{10-3x^2} dx$ e) $\int_1^3 \frac{2x+1}{x^2+x+4} dx$ f) $\int_0^3 \frac{x^2+4}{x^3+12x+1} dx$

◁

7.21 Berechne mittels partieller Integration!

a) $\int \sin x \cos x dx$ b) $\int \cos x dx$ c) $\int x \arctan x dx$
d) $\int \sin^2 x dx$ e) $\int x^2 \sin x dx$ f) $\int \log x$

◁

7.22 Bestimme die Stammfunktion!

a) $\int \arcsin x dx$ b) $\int \arctan x dx$

◁

7.23 Berechne folgende Integrale mittels Partialbruchzerlegung!

a) $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$ b) $\int_2^3 \frac{dx}{x^4-1}$
c) $\int \frac{2x+3}{x^2-5x+6} dx$ d) $\int_{-1}^3 \frac{x^2-x+2}{x^4-5x+4} dx$

◁

7.24 Integriere mittels Partialbruchzerlegung!

a) $\int \frac{1}{x^2+1} dx$ b) $\int \frac{x^2}{x^3-1} dx$ c) $\int \frac{1}{x^4+1} dx$
d) $\int \frac{1}{x^2-1} dx$ e) $\int \frac{x^3}{x^4+2x^2+1} dx$ f) $\int \frac{2x+1}{x^2+4x+12} dx$

◁

7.25 Finde die Stammfunktionen!

a) $\int e^{3x+4} dx$ b) $\int x(\log x)^2 dx$ c) $\int a^x dx \quad a \in \mathbb{R}$

◁

7.26 Berechne die Fläche zwischen der Funktion $f(x)$ und der x -Achse zwischen den Nullstellen:

a) $f(x) = x^2 - 2x$

b) $f(x) = x(x - 1)^2$

◁

7.27 Berechne die Fläche zwischen der Funktion f und der x -Achse im gegebenen Intervall:

a) $f(x) = \sin x$ $x \in [0, \frac{5}{4}]$

b) $f(x) = \log \frac{x}{2}$ $x \in [\frac{1}{2}, 4]$

c) $f(x) = e^{-2x+1}$ $x \in [0, 1]$

d) $f(x) = |x - 3|$ $x \in [2, 4]$

◁

7.28 Berechne die Fläche zwischen den Funktionen f und g im Intervall zwischen den reellwertigen Schnittpunkten beider Funktionen:

a) $f(x) = x^2 + 4$ $g(x) = 2x^2$

b) $f(x) = x^2$ $g(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = x^2$ $g(x) = \frac{x^3}{3}$

d) $f(x) = \log x$ $g(x) = (\log x)^2$

e) $f(x) = 4x$ $g(x) = x^2 + 2x - 3$

◁