Einheit 6 - 1D Verfahren

6.1 Differenzieren – Wiederholung

Dieses Kapitel wird nicht in den Übungen behandelt. Es soll nur eine Hilfestellung sein, sich den AHS/BHS-Stoff wieder in Erinnerung zu rufen bzw. Nicht-Behandeltes aus Schulbüchern nachzulernen.

Bemerkung: In den Unterlagen kommt immer wieder die log-Funktion vor. In der Mathematik wird damit – wie international üblich – der natürliche Logarithmus bezeichnet, d. h., der Logarithmus zur Basis e, der Euler'schen Zahl. In der Schule ist die Bezeichnung ln geläufig, die aber in der Mathematik selten bis nicht verwendet wird. Der dekadische Logarithmus, der im Rechnungswesen eine Rolle spielt, wird mit $\log_{10}$ oder manchmal auch mit lg bezeichnet.

Bei der Berechnung von Winkelfunktionen ist immer in Radiant zu rechnen, d. h. $360° = 2\pi$ rad.

6.1 Differenziere folgende rationale Funktionen:

a) $f(x) = \dfrac{1}{a+bx} \qquad a, b \in \mathbb{R}$ b) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-x^3}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$

◁

6.2 Differenziere folgende Wurzelfunktionen:

a) $f(x) = \sqrt{x+2}$ b) $f(x) = \sqrt{x^3-2x}$

c) $f(x) = \sqrt{a^2+x^2} \qquad a \in \mathbb{R}$ d) $f(x) = \sqrt{x^8-4x^4+4}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+2}$ f) $f(x) = \sqrt[n]{x^m+4} \qquad n, m \in \mathbb{N}$

◁

6.3 Differenziere folgende Funktionen:

a) $f(x) = \sin x + \cos x$ b) $f(x) = \sin x \cos x$

c) $f(x) = \sin^2 x$ d) $f(x) = 1 - \cos^2 x$

e) $f(x) = \sin(x^2)$ f) $f(x) = \cos x - x \sin x$

g) $f(x) = \tan x \cdot \sin x$ h) $f(x) = \arctan \sqrt{x}$

i) $f(x) = \arcsin(x^2+2)$ j) $f(x) = \arccos(e^x)$

k) $f(x) = \arctan(\frac{x}{1+x})$ l) $f(x) = \operatorname{arccot}(\frac{x}{1+x})$

m) $f(x) = \arctan(\cot(x))$ n) $f(x) = \sinh(x-a)$

o) $f(x) = \sinh(x^2-a)$ p) $f(x) = \cosh(x^2+2)$

q) $f(x) = \operatorname{arctanh}(x)$ r) $f(x) = \operatorname{arcsinh}(x)$

Hinweis: $(f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ ◁

6.4 Bilde die erste Ableitung der Determinante

$$D(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

$\triangleleft$

6.2 Taylorreihen

Um komplizierte, jedoch n-mal stetig differenzierbare Funktionen $f(x)$ durch einfachere Funktionen (etwa lineare oder quadratische oder etwa $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$) näherungsweise darzustellen, gibt es in der Mathematik unter anderem das Hilfsmittel der Taylorreihen. Eine solche Funktion $f(x)$ kann dann durch eine Taylorreihe folgendermaßen dargestellt werden:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

wobei für das Restglied $R_n(x)$ gilt, dass

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad \theta \in (0,1)$$

und

$$|R_n(x)| \leq C \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{falls} \quad |f^{(n)}\xi| \leq C,\ \xi \in [x, x_0],\ \forall n,$$

sodass $R_n(x)$ umso kleiner ist, je näher x an x_0 liegt, und je größer n ist.

Als Punkt x_0, an dem die Taylorreihe entwickelt wird, wählen wir einen, an dem die Ableitungen $f^{(k)}(x_0)$ einfach zu berechnen sind.

Eine Taylorreihe heißt auch MacLaurin-Reihe, falls $x_0 = 0$.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \Rightarrow$
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ f''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} \\ f'''(x) &= \frac{6}{(1-x)^4} \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \tfrac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \end{aligned}$$

bei Entwicklung an der Stelle $x_0 = 0$.

Typische Taylorreihen sind:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\
\log(x+1) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Taylorreihen für e^x, $\sin x$ und $\cos x$, so lässt sich daraus folgern, dass für $x = i\varphi$ gilt

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

was sich durch einen einfachen Koeffizientenvergleich beweisen lässt!

6.5 Leite folgende Identität her (i ist die komplexe Einheit):

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

◁

6.6 Zeige folgende Identitäten

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

LÖSUNG:
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ und $e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$ —

◁

6.7 Entwickle folgende Funktionen in eine Taylorreihe um den Nullpunkt!

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ b) $f(x) = (1+x)^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$
c) $f(x) = \log(1+x)$ d) $f(x) = \cosh x$
e) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ f) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
g) $f(x) = \arctan x$

Hinweis: $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ ◁

6.8 Berechne die Werte folgender Taylorreihen:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Anleitung: Betrachte die Taylorreihen von $\log(1+x)$ und e^x! ◁