Einheit 5 - Anwendungen

5.1 Sie bearbeiten Punkte im 3-dimensionalen Raum. Geben Sie Transformationsmatrizen an für:

a) Translation in Richtung $(2, 3, -2)$ mit anschließender Rotation um die x-Achse um 45 Grad.

b) Rotation um die x-Achse um 45 Grad mit anschließender Translation in Richtung $(2, 3, -2)$.

c) Translation in Richtung $(2, 1, 0)$ mit anschließender Skalierung um 50%.

d) Skalierung um 50% mit anschließender Transformation in Richtung $(2, 1, 0)$.

◁

5.2 Sie bearbeiten Punkte im 2-dimensionalen Raum. Gegeben ist das Dreieck (0,0),(2,1),(1,2). Geben Sie die folgenden Transformationen als Matrix an und wenden Sie diese auf das Dreieck an.

a) Translation in Richtung $(2, 3)$ mit anschließender Rotation um die z-Achse um 45 Grad.

b) Rotation um die z-Achse um 45 Grad mit anschließender Translation in Richtung $(2, 3)$.

c) Translation in Richtung $(2, 1)$ mit anschließender Skalierung um 50%.

d) Skalierung um 50% mit anschließender Transformation in Richtung $(2, 1)$.

◁

5.3 Klassifizieren Sie die folgenden Kurven/Flächen zweiten Grades:

a) $x^2 - 2xy + y^2 = 16$

b) $2x^2 + 4xy = 12$

c) $3x^2 + 3y^2 - 2x - 14y = 13 - 10xy$

d) $7x^2 - 4xy - 8xz + 4y^2 + 4yz + 7z^2 + 2x - 4y + 16z + 18 = 0$

◁

5.4 Berechnen Sie die Koeffizienten β_i sowie die geschätzten Funktionswerte der folgenden Regression. Der funktionale Zusammenhang sei gegeben durch $f(x_1, x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ und Messwerte zeigen:

x_1	5	3	5	3
x_2	0.5	0.5	0.3	0.3
$f(x_2, x_2)$	1.7	3.3	6.5	3.0

◁

5.5 Folgende Stützpunkte sind gegeben:

i	x_i	f_i
0	0	3
1	1	1
2	2	-1
3	4	0
4	5	-2

Benütze das Interpolationsverfahren von Newton, um die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ zu bestimmen. ◁

5.1 Spezielle Matrizen

5.6 Welche Matrix R dreht einen Vektor um 90° ? – Es muss gelten:

$$R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

Vergleichen Sie das mit den Drehmatrizen aus der Vorlesung ! ◁

5.7 Welche $2 \times 2-$Matrix R dreht jeden zweidimensionalen Vektor um 45° ? ◁

5.8 Welche $2 \times 2-$Matrix vertauscht die Koordinaten x und y jedes zweidimensionalen Vektors ? ◁

5.9 Welche $3 \times 3-$Matrix permutiert (a, b, c) zu (c, a, b) ? Betrachten Sie den Vektor einmal als Zeilenvektor, einmal als Spaltenvektor. ◁

5.10 Welche geometrische Interpretationen finden Sie für die beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

◁

5.11 Versuchen Sie anhand des unten angegebenen Gleichungssystems $Ax = b$, das Gauß'sche Eliminationsverfahren durch Matrizenoperationen nachzubilden, d. h., die (erweiterte) Koeffizientenmatrix so mit entsprechenden Matrizen zu multiplizieren, dass das Eliminationsverfahren Schritt für Schritt nachvollzogen wird. Führen Sie sodann das Verfahren in einem Schritt durch, indem Sie die Koeffizientenmatrix mit nur einer Matrix multiplizieren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \end{array}$$

◁

5.12 Dasselbe wie im letzten Beispiel für die Gauß-Jordan-Elimination zur Berechnung der Inversen A^{-1}. ◁

5.13 Zwei linear unabhängige Vektoren a und b im $\mathbb{R}^2$ spannen ein Parallelogramm auf, dessen Flächeninhalt mit Hilfe der Determinante der $2 \times 2-$Matrix $A = (a, b)$ berechnet werden kann. Vergleichen Sie diesen mit den Flächeninhalten der Parallelogramme zwischen $a + b$ und b, bzw., zwischen $a - b$ und b; zuerst anhand selbst gewählter Beispiele, dann allgemein. Was beobachten Sie? Warum? (Skizzen) ◁

5.14 Die von den Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramme haben denselben Flächeninhalt. Haben Sie eine Erklärung dafür? ◁