Einheit 4 - Arbeiten mit Matrizen

4.1 Rang, Dimension und Basis

4.1 Welche der folgenden Mengen von Vektoren sind linear abhängig?

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

◁

4.2 Lässt sich der Vektor $\boldsymbol{a}$ als Linearkombination $\sum_i \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ ausdrücken? Wenn ja, wie?

a) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ◁

b) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

4.3 Bestimme den Rang folgender Vektorsysteme

a) $\left\{\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ b) $\left\{\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

c) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ d) $\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

◁

4.4 Zu bestimmen ist der Rang folgender Vektorsysteme $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$

a) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ◁

b) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.5 Bestimme den Rang folgender Matrizen!

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

◁

4.6 Berechne den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

◁

4.2 Determinanten

4.7 Berechne die Determinante!

a) $A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ b) $B_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$ c) $A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

d) $B_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ e) $A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ f) $B_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

◁

4.8 Mit den Matrizen A_i, B_i, $i = 1, 2, 3$, des Beispiels 4.7, sowie an Hand von allgemeinen (2×2)–Matrizen A und B zeige:

$$|AB| = |A|\,|B|$$

$\triangleleft$

4.9 Allgemein gilt $|A + B| \neq |A| + |B|$. Finde dazu ein Beispiel! $\triangleleft$

4.10 Berechne mit Hilfe des Entwicklungssatzes folgende Determinanten!

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$\triangleleft$

4.11 Berechne die Determinanten!

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\triangleleft$

4.12 Berechne die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mit dem Entwicklungssatz! $\triangleleft$

4.13 Berechne die Determinante der Matrix

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 5 & -1 & 3 & 5 & 7 & -5 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

◁

4.14 Löse das Gleichungssystem mit Hilfe der *Cramer*'schen Regel!

a) $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 0 & 7 & -1 \\ 4 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}$

◁

4.15 Das Modell eines Marktes für 2 Güter werde durch folgende Gleichung beschrieben (nach F. Pfuff)

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \gamma = 0 \qquad \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \delta = 0$$

Dabei seien P_1, P_2 die Preise der zwei Güter und α_1, α_2, β_1, β_2, γ, δ Konstante.

a) Bestimme mit Hilfe der *Cramer*'schen Regel den Gleichgewichtspunkt $(\overline{P}_1, \overline{P}_2)$, d.h. den Schnittpunkt der beiden Geraden!

b) Welche Bedingungen müssen die Konstanten erfüllen, damit eine Lösung existiert?

◁

4.16 Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A invertierbar?

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 2 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & \alpha \\ 2\alpha & 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}$

◁

4.17 Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das folgende Gleichungssystem eindeutig lösbar?

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 3 & 1+\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1+\alpha & 3 & 0 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gib jeweils eine Lösung an! ◁

4.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

4.18 Für welche $\boldsymbol{x}$ gilt die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$?

$$\text{a)}\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 9$$

$$\text{b)}\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = -3$$

◁

4.19 Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen!

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

◁

4.20 Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen und gebe deren algebraische und geometrische Vielfachheit an!

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

◁

4.21 Ist A eine symmetrische Matrix, so sind die zu verschiedenen Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren orthogonal. Überprüfe das an

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$

◁

4.22 Zwei Matrizen A und B heißen ähnlich, wenn es eine Matrix U gibt, sodass $B = U^{-1}AU$. Es gilt: Ähnliche Matrizen haben gleiche Eigenwerte.

Berechne die zu A ähnliche Matrix B und überprüfe dieses Resultat für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

◁

4.23 Wenn eine quadratische Matrix A nur verschiedene Eigenwerte hat, und T die Eigenvektormatrix ist, dann ist $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix. Überprüfe dies an

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

◁

4.24 Ist A eine symmetrische Matrix, T die Matrix der zugehörigen, normierten Eigenvektoren, dann ist T eine orthonormale Matrix, d.h., $T^{-1} = T^t$, und T^tAT ist eine Diagonalmartix. Überprüfe dies an

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$

◁

4.25 Vergleichen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren auf Lage und Länge der folgenden Matrix A und ihrer Inversen!

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad\qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\triangleleft$

4.26 Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Was beobachten Sie? $\triangleleft$

4.27 Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Wie interpretieren Sie diese und was stellt die Matrix dar? $\triangleleft$