# Einheit 3 - Lineare Abbildungen und Matrizen

3.1 Welche der folgenden Abbildungen sind linear ? Warum ?
Beweis bzw. Gegenbeispiel !

a) $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

b) $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 3x_2 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix}$

c) $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 5x_1 - x_2 \\ 0 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$

d) $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_3 - x_2 \\ 1 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$

e) $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ -2 \end{pmatrix}$

f) $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_3 \\ |x_2| \\ 0 \end{pmatrix}$

g) $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

h) $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$

◁

3.2 Bestimme die zu folgenden linearen Abbildungen gehörigen Matrizen !

a) $f_1(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ◁

b) $f_2(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

c) $f_3(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$

d) $f_4(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

e) $f_5(\begin{pmatrix} x_1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 3x_1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$

f) $f_6(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_3 \\ 5x_1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

3.3 Bestimme die zur Matrix $B$ gehörige lineare Abbildung $g$ !

a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

c) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

◁

3.4 Sei $\mathbf{1}_n = (1, 1, \ldots, 1)^t$ der $n \times 1$ Einsvektor. Berechne das arithmetische Mittel $\overline{y} = \frac{1}{n}\mathbf{1}_n^t\boldsymbol{y}$ und die Mittelwert-bereinigten Werte $(I_n - \frac{1}{n}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^t)\boldsymbol{y}$ von:

a) $n = 5;\quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 8 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $n = 8;\quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 8 \\ 7 \\ 2 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ c) $n = 6;\quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 120 \\ 90 \\ 130 \\ 100 \\ 80 \\ 140 \end{pmatrix}$

◁

3.5 Berechne folgende zusammengesetzte Abbildungen mit den Angaben aus Beispiel 3.2:

a) $f_3 \circ f_1$ b) $f_5 \circ f_3$ c) $f_2 \circ f_2$ d) $f_6 \circ f_1 \circ f_6$

◁

3.6 Gegeben seien die linearen Abbildungen $f$ und $g$

$$f\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_3 - \lambda_1 \\ \lambda_3 - \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad g\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \mu_2 - \mu_1 \\ -2\mu_1 \\ \mu_1 + 2\mu_2 \end{pmatrix}$$

Bilde die Matrix-Darstellung von

a) $g \circ f$ b) $f \circ g$ c) $f \circ g \circ f$

◁

3.7 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechne

a) $A\boldsymbol{x} + A^t\boldsymbol{y}$ b) $\boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^tA\boldsymbol{y}$ c) $\boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^tA\boldsymbol{x}$

◁

3.8 Berechne die inverse lineare Abbildung $f^{-1}$ von

a) $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ b) $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$

c) $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 \\ x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$

◁

3.9 Berechne die Inversen der Diagonalmatrizen $A = \operatorname{diag}(2,4)$ und $B = \operatorname{diag}(1,7,5)$ ! ◁

3.10 Berechne $A^{-1}$ bzw. $B^{-1}$ !

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ d) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

◁

3.11 Es gilt: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Überprüfe dies an den Matrizen aus Beispiel 3.10 ! ◁

3.12 Berechne die inverse Matrix !

a) $\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

◁

3.13 Löse folgende Gleichungssysteme mit Hilfe der inversen Matrix !

a) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & & & = & 4 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$ b) $\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & & & = & 11 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & & & = & 2 \\ 6x_1 & + & 8x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \end{array}$

◁