

Übungsblatt 2

Lineare Algebra – Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1

Lösen Sie folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0\end{aligned}$$

Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch, wenn die Gleichungen drei Ebenen repräsentieren.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die Lösbarkeit des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 11 \\2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 19 \\3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 30\end{aligned}$$

Interpretieren Sie das Ergebnis wieder geometrisch.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\x_1 - x_2 + 5x_3 &= 2\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch:

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 &= -2 \\-x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 11 \\2x_1 + x_2 - 6x_3 + 2x_4 &= 5\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden homogenen Gleichungssystems und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\2x_1 + x_2 - 6x_3 &= 0\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Untersuchen Sie die Lösbarkeit des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= -1 \\3x - y + 2z &= 7 \\5x + 3y - 4z &= 2\end{aligned}$$

Bestimmen Sie Lösung des zugehörigen homogenen Systems. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse geometrisch.

Aufgabe 7

Sagt eine Bäuerin zur anderen: "Ach gib mir doch eine Henne, dann habe ich auch so viele wie du!" Kontert die andere: "Gib mir doch eine, dann habe ich doppelt so viele wie du!" Wie viele Hennen hat jede?

Aufgabe 8

Marie ist 24 Jahre alt. Sie ist doppelt so alt, wie Anna war, als Marie so alt war, wie Anna jetzt ist. Wie alt ist Anna?

Aufgabe 9

Ein Hausmann findet beim Ausmisten drei etwas ältere Rechnungszettel vom Obststand am Bauernmarkt. Der erste lautet: 3 kg Äpfel, 1 kg Birnen, 2 kg Bananen, Summe: 58 S; der zweite: 1 kg Äpfel, 2 kg Birnen, 1 kg Bananen, Summe: 40 S; der dritte: 2 kg Äpfel, 1 kg Birnen, 1 kg Bananen, Summe: 38 S. Wie teuer waren damals 1 kg Äpfel, 1 kg Birnen, 1 kg Bananen?

Aufgabe 10

Von einer dreistelligen Zahl ist die dritte Ziffer dreimal so groß wie die Summe aus den beiden ersten Ziffern. Vermindert man die dritte Ziffer um die zweite Ziffer, so erhält man das Vierfache der ersten Ziffer. Die Ziffernsumme der Zahl beträgt 12. Wie lauten die Ziffern der Zahl?

Aufgabe 11

Ein Polynom 4. Grades ist achsensymmetrisch zur y -Achse und geht durch die Punkte $(0, -4)$, $(1, -6)$ und $(2, 0)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms.

Aufgabe 12

Der Graph einer Polynomfunktion 4. Grades besitzt die Wendepunkte $W_1(0|0)$ und $W_2(1|-1)$. In W_1 ist die x -Achse Tangente. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Aufgabe 13

Eine zur y -Achse symmetrische Parabel 4. Ordnung hat in $P(-2|-11)$ eine horizontale Tangente und schneidet die y -Achse im Punkt $Q(0|5)$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Aufgabe 14

Eine zur y -Achse symmetrische Polynomkurve 4. Grades hat in $W(1|0)$ einen Wendepunkt. Die Steigung der Wendetangente ist $k_w = -8$. In ihren beiden Wendepunkten wird sie von einer Parabel 2. Ordnung berührt. Ermitteln Sie die Koeffizienten beider Polynome.

Aufgabe 15

Eine Parabel 4. Ordnung geht durch den Punkt $N_2(4|0)$ und hat im Ursprung einen Wendepunkt mit der x -Achse als Wendetangente. Der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve und der x -Achse ist $32/5$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Aufgabe 16

Der Graph der Funktion $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x^3 + bx^2 + cx + d$ geht durch den Punkt $P(2|3)$ und hat in $T(1|-1)$ den Tiefpunkt. In seinem Wendepunkt wird er vom Graphen der Funktion $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto px^2 + qx + r$ berührt. Der Scheitelpunkt von g liegt an der Stelle -1 . Ermitteln Sie die Koeffizienten beider Polynome.

Aufgabe 17

Eine zur y -Achse symmetrische Parabel 4. Ordnung hat in $W(-\sqrt{3}|0)$ einen Wendepunkt mit der Wendetangente $t_w : 8\sqrt{3}x - 3y + 24 = 0$. Wie lautet die Funktionsgleichung?