Konzept diskreter Zufallsvariablen

Univ.Prof. Dr. Marcus Hudec

Vom Zufallsexperiment zur Zufallsvariable

- 3 Münzen werden unabhängig voneinander geworfen. Jede Münze kann entweder Kopf oder Zahl zeigen.

Elementar-ereignis	Wahrschein-lichkeit
KKK	1/8
KKZ	1/8
KZK	1/8
ZKK	1/8
KZZ	1/8
ZKZ	1/8
ZZK	1/8
ZZZ	1/8

Ereignisraum

Vom Zufallsexperiment zur Zufallsvariable

- 3 Münzen werden unabhängig voneinander geworfen. Jede Münze kann entweder Kopf oder Zahl zeigen. Man ist nur an der Zahl der Köpfe interessiert, wodurch 4 (zusammengesetzte) Ereignisse entstehen.

Elementar-ereignis	Anzahl Kopf	Wahrschein-lichkeit
KKK	3	1/8
KKZ	2	1/8
KZK	2	1/8
ZKK	2	1/8
KZZ	1	1/8
ZKZ	1	1/8
ZZK	1	1/8
ZZZ	0	1/8

Beispiel: Zufallsvariable

- Jedem Elementarereignis ist eine Zahl zugeordnet (Anzahl der beobachteten Köpfe) ➔ jedem (zusammengesetzten) Ereignis entspricht ebenfalls genau eine Zahl
- Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Zahl ergibt sich durch Summation der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse, die mit dieser Zahl verknüpft sind:

Anzahl Kopf	0	1	2	3
Wahrschein-lichkeit	1/8	3/8	3/8	1/8

Beispiel Zufallsvariable (aus dem Buch von Agresti)

- General Social Survey
- Question: „*What do you think is the ideal number of children for a family to have?*"

Ideal Number	0	1	2	3	4	5
Probability	0,01	0,03	0,60	0,23	0,12	0,01

- *If you randomly pick out a person from the US-population survey the probability of each allowed answer will follow the above table.*

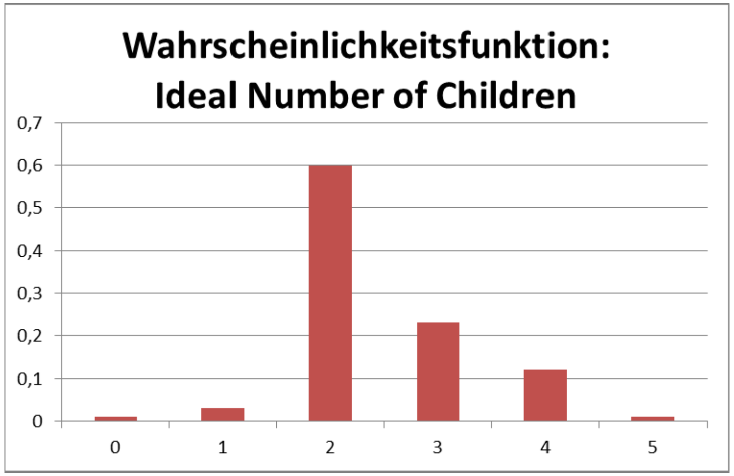
Diskrete Zufallsvariable

- Eine Variable X, die jedem möglichen Elementarereignis $e \in E$ eines Zufallsexperimentes eine Zahl X(e) zuordnet, wird als Zufallsvariable bezeichnet.
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X ist die Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu allen durch X definierten Ereignissen.

Wahrscheinlichkeitsfunktion

- Die Funktion f(x), die jeder Zahl x die Wahrscheinlichkeit P(X=x) zuordnet, heißt Wahrscheinlichkeitsfunktion der diskreten Zufallsvariablen X:

$$f(x) = P(X = x)$$



- Seien $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ die Realisationsmöglichkeiten der diskreten Zufallsvariablen X, so wird die Wahrscheinlichkeitsfunktion oft kurz als p_i geschrieben:

$$f(x_i) = P(X = x_i) = p_i \quad i=1, 2, \ldots$$

Beispiel: Zufallsvariable

- Jedem Elementarereignis wird eine Zahl zugeordnet (Anzahl der beobachteten Köpfe)

Anzahl Kopf	0	1	2	3
Wahrschein-lichkeit	1/8	3/8	3/8	1/8

  - $P\{X=2\} = 3/8$
  - $P\{X \leq 2\} = 1 - P\{X > 2\} = 1/8 + 3/8 + 3/8 = 1-1/8 = 7/8$
  - $P\{0 < X \leq 1\} = 3/8$
  - $P\{X > 1\} = 1 - P\{X \leq 1\} = 3/8 + 1/8 = 1 - 1/8 - 3/8 = 4/8$

Verteilungsfunktion

- Um die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X zu definieren, genügt es Ereignissen des Typs

$$\{X \leq x\}$$

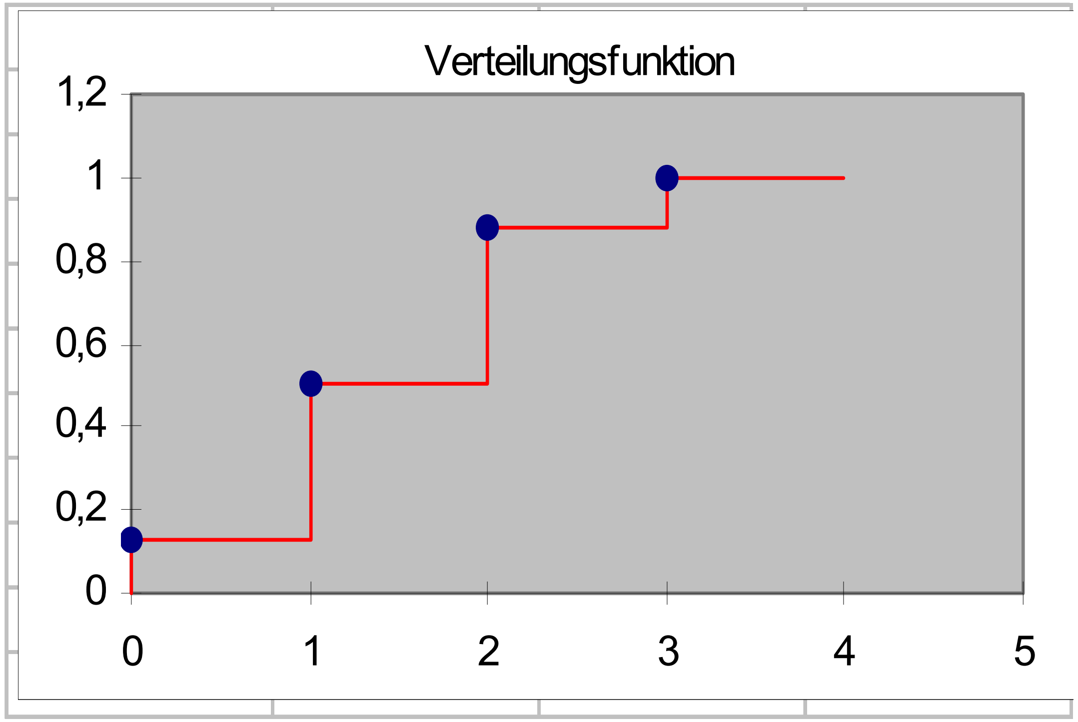
  Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen.
- Daraus lassen sich bereits für alle anderen durch X definierten Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten ermitteln.
- Die Funktion F(x), die jedem x die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x)$ zuordnet nennt man die theoretische Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X:

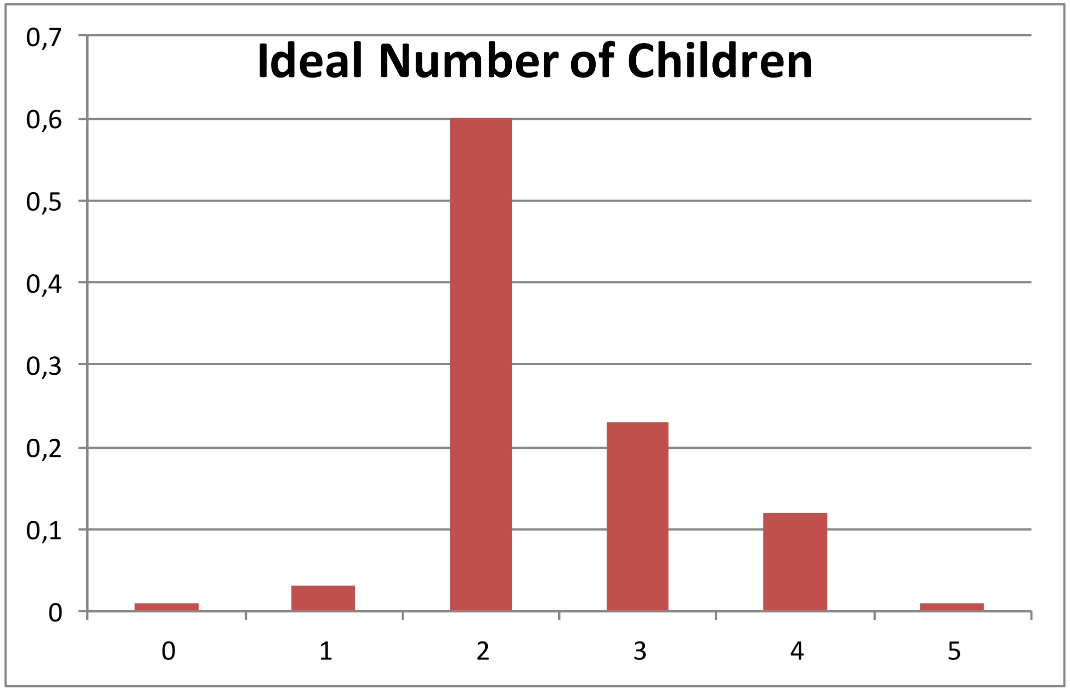
$$F(x) = P(X \leq x)$$

Beispiel: Münzwurf

Anzahl Kopf	0	1	2	3
Wahrscheinlichkeits-funktion	1/8	3/8	3/8	1/8
Verteilungsfunktion	1/8	4/8	7/8	8/8

- $P\{X \leq 0\} = 1/8$
- $P\{X \leq 1\} = 4/8$
- $P\{X \leq 2\} = 7/8$
- $P\{X \leq 3\} = 8/8$





X Ideal Number	Probability	Cum. Prob
0	0,01	0,01
1	0,03	0,04
2	0,60	0,64
3	0,23	0,87
4	0,12	0,99
5	0,01	1,00
	1	

Prob $(2 \leq X \leq 3) = 0{,}60 + 0{,}23 = 0{,}83$

Prob$(X \leq 3) = 0{,}87$

Prob$(X \leq 1) = 0{,}04$

Prob $(2 \leq X \leq 3) =$ Prob$(X \leq 3)$ - Prob$(X \leq 1) = 0{,}87 - 0{,}04 = 0{,}83$

Sprachliche Formulierungen

- Für eine diskrete Zufallsvariable (definiert auf Z) sind folgende Formulierungen äquivalent:
  - X größer 2 $X>2$ $X\geq 3$
  - X zumindest 3 $X\geq 3$
  - X ist 3 oder mehr $X\geq 3$
  - X ist nicht kleiner als 3 Nicht$(X<3)= X\geq 3$
- Ebenfalls äquivalent sind die folgenden Aussagen:
  - X ist kleiner als 2 $X<2$ $X\leq 1$
  - X ist höchstens 1 $X\leq 1$
  - X ist 1 oder kleiner $X\leq 1$
  - X ist nicht größer als 1 Nicht$(X>1)= X \leq 1$

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

- $F(x)$ nimmt nur Werte zwischen 0 und 1 an, d.h. es gilt

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

- $F(x)$ steigt für wachsendes x monoton an

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$

- $F(x) \rightarrow 1 \quad$ für $x \rightarrow \infty$

- $F(x) \rightarrow 0 \quad$ für $x \rightarrow -\infty$

Beziehung f(x) ⇔ F(x) im diskreten Fall

- Zwischen der Wahrscheinlichkeitsfunktion f(x) und der Verteilungsfunktion F(x) gelten im Fall der diskreten Zufallsvariable X mit den Realisationsmöglichkeiten $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$:
- $F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$
- $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(x_i)$

Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Werte der Verteilungsfunktion, wird durch die Wahrscheinlichkeit des größeren Wertes bestimmt

- $F(x_i) = P(X \leq x_i) =$
  $= P(X < x_i) + P(X = x_i) =$
  $= F(x_{i-1}) + P(X = x_i)$

Erwartungswert

- Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit den Realisationsmöglichkeiten x_i und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_i=P(X=x_i)$, $i=1,2,\ldots$

  Dann heißt E(X) der Erwartungswert von X.

$$\boxed{E(X) = \mu = \sum_i x_i p_i}$$

  Gewichtete Summe der Merkmalsausprägungen, wobei die Gewichte die Wahrscheinlichkeiten sind.

Arithm. Mittel versus Erwartungswert

- Erwartungswert ist ein theoretischer Wert (theoretischer Lageparameter), der die zentrale Tendenz einer diskreten Zufallsvariable charakterisiert, indem die Merkmalsausprägungen mit ihrer Wahrscheinlichkeit multipliziert und dann summiert werden.
- Das arithmetische Mittel ist ein empirischer Wert (empirischer Lageparameter), der die zentrale Tendenz einer realen Beobachtung (Stichprobe) charakterisiert, indem die Merkmalsausprägungen mit ihrer relativen Häufigkeit multipliziert und dann summiert werden.

Varianz einer ZV

Misst die theoretisch zu erwartende Schwankung eines zufälligen Phänomens

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = \sum_i [x_i - E(X)]^2 p(x_i)$$

Analoge Eigenschaften wie bei der empirischen Varianz

$$Y = a + bX \Rightarrow V(Y) = b^2 V(X)$$

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \quad \text{nur bei Unabhängigkeit}$$

Beispiel aus Buch von Agresti

X Ideal Number	Probability	E(X)	E(X²)
0	0,01	0	0
1	0,03	0,03	0,03
2	0,6	1,2	2,4
3	0,23	0,69	2,07
4	0,12	0,48	1,92
5	0,01	0,05	0,25
		2,45	6,67

$$E(X) = \mu = \sum_i x_i p_i$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Erwartungswert 2,45

Varianz 0,6675

Standardabweichung 0,8170

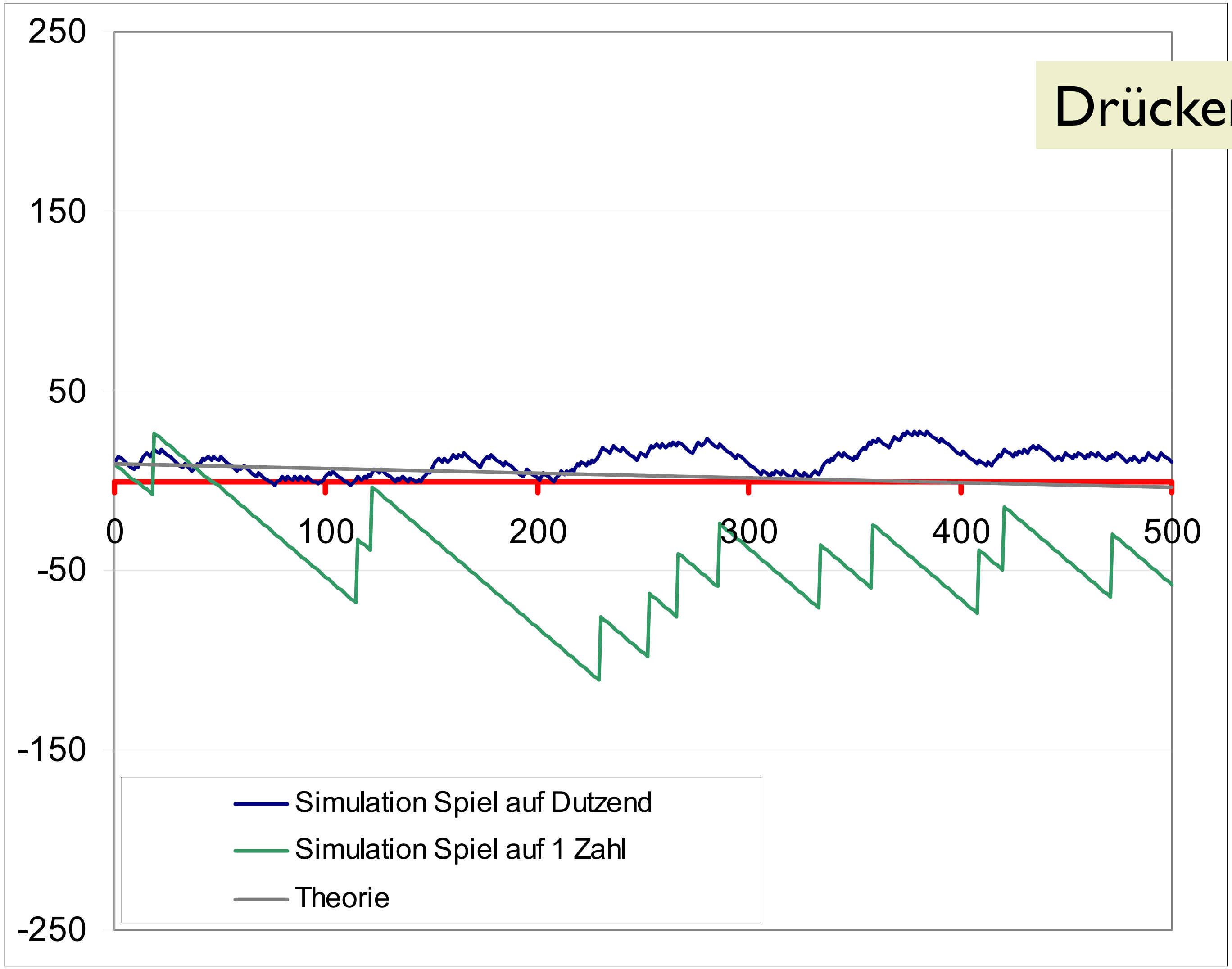
Varianz beim Roulette (Varianz.XLS)

Gewinn	Prob	Erwartung	E(Gewinn^2)		
2	0,324	0,649	1,297		
-1	0,676	-0,676	0,676	Varianz	Std.Abw.
		-2,70%	1,973	1,972	1,404

Gewinn	Prob	Erwartung	E(Gewinn^2)		
35	0,027	0,946	33,108		
-1	0,973	-0,973	0,973	Varianz	Std.Abw.
		-2,70%	34,081	34,080	5,838

Unterschiedliche Strategien haben den selben Erwartungswert aber eine verschiedene Varianz !

Varianz beim Roulette (Varianz.XLS)



Drücken Sie F9

Beispiel Würfelwurf

- Wir betrachten einen idealen (unverfälschten) Würfel, welcher folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion besitzt:

Augenzahl	Probability	E(X)	E(X²)
1	0,1667	0,1667	0,1667
2	0,1667	0,3333	0,6667
3	0,1667	0,5000	1,5000
4	0,1667	0,6667	2,6667
5	0,1667	0,8333	4,1667
6	0,1667	1,0000	6,0000
	1,0000	3,5	15,1667

Erwartungswert 3,5

Varianz 2,9167

Standardabweichung 1,7078

Inferenzstatistisches Prinzip

- In der Inferenzstatistik (schließenden Statistik) versucht man durch den systematischen Vergleich von empirischen Häufigkeitsverteilungen mit hypothetischen theoretischen Modellen Schlussfolgerungen über den datengenerierenden Prozess ziehen zu können.
- Dieser Vergleich kann auf verschiedenen Ebenen erfolgen:
  - Vergleich der theoretischen und der empirischen Verteilung (z.B. Säulendiagramm mit relativen Häufigkeiten versus Wahrscheinlichkeitsfunktion)
  - Vergleich von Maßzahlen der Verteilung (z.B. Mittelwert versus Erwartungswert)

Beispiel: Diskrete Zufallsvariable

- Bei einem Wissenstest muss ein Kandidat bei jeder Frage ein Zuordnungsproblem der folgenden Art lösen:
- 1) Erste Türkenbelagerung
- 2) Schlacht von Hastings
- 3) Entdeckung Amerikas
- a) 1066 b) 1492 c) 1529
- Der Ereignisraum kann wie folgt dargestellt werden:

a b c	a c b	b a c
b c a	c a b	c b a

- Die Anzahl der richtigen Antworten bei dieser Frage ist, da die korrekte Lösung (c a b) lautet, wie folgt:

0	1	1
0	3	1

Beispiel: Diskrete Zufallsvariable

- Geht man davon aus, dass der Kandidat die Fragen rein nach dem Zufallsprinzip beantwortet (jede der 6 Antworten mit gleicher Wahrscheinlichkeit wählt), ergibt sich für die Wahrscheinlichkeitsfunktion der richtigen Antworten folgendes:

Anzahl richtige Antworten	0	1	2	3
Wahrschein-lichkeit	2/6	3/6	0	1/6

Beispiel: Diskrete Zufallsvariable

- Stellt man den Kandidaten wiederholt eine Problemstellung des obigen Typs, kann man wohl davon ausgehen, daß der Kandidat im Mittel pro Problem eine richtige Antwort treffen wird:

x_i	p_i	$x_i p_i$
0	2/6	0
1	3/6	3/6
2	0	0
3	1/6	3/6
Summe	1	1

- Dieses gewogene Mittel nennt man den Erwartungswert einer Zufallsvariablen.

Anwendung beim Zuordnungstest

- In 3 Schulklassen (A, B, C) mit je 30 Schülern wird der zuvor beschriebene Zuordnungstest durchgeführt:

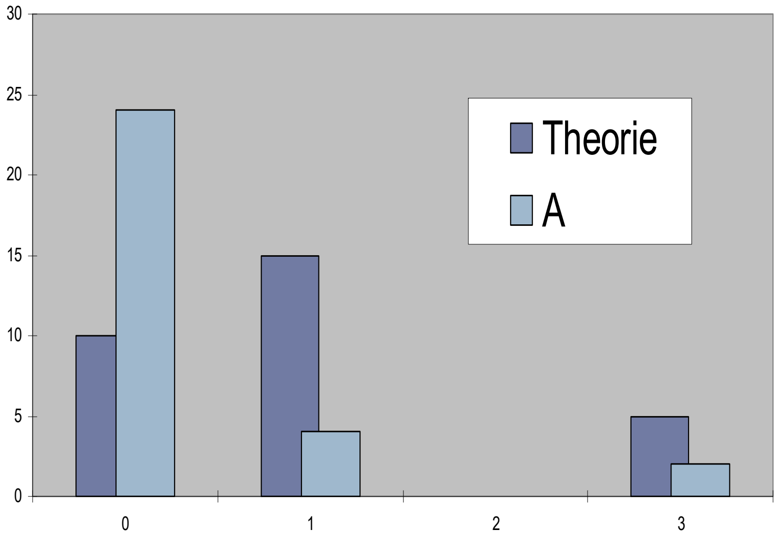
Korrekt	Prob	Theorie	A	B	C
0	2/6	10	24	11	4
1	3/6	15	4	15	6
2	0	0	0	0	0
3	1/6	5	2	4	20

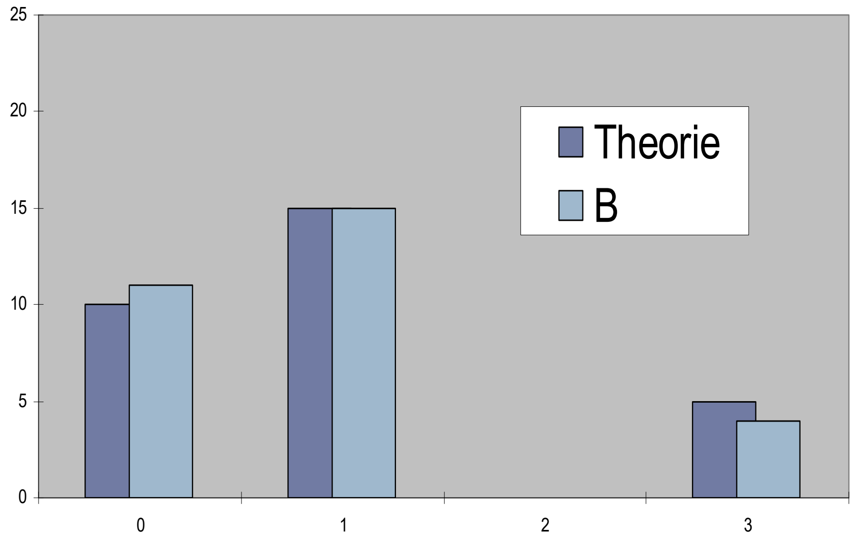
- Erwartungswert bei zufälligem Antwortverhalten 1 richtige Lösung pro Schüler

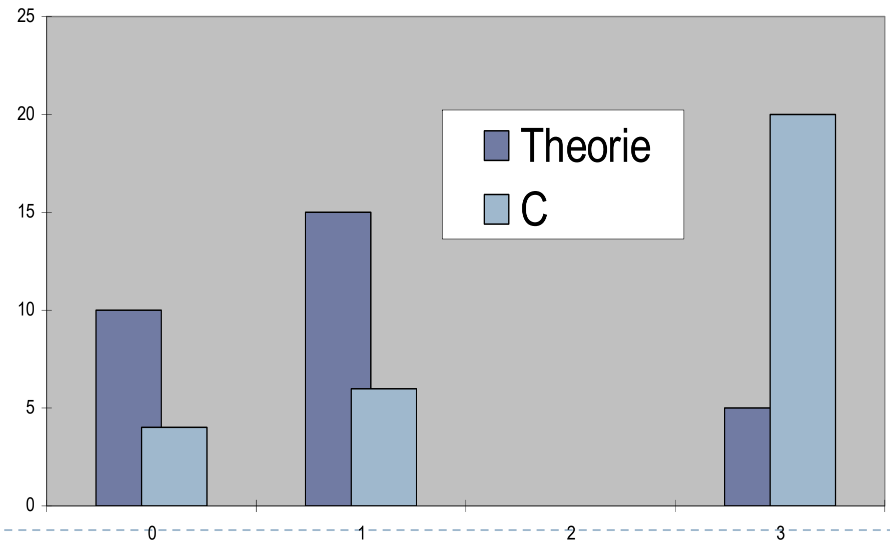
- Mittelwert in Klasse(A): 1/3
- Mittelwert in Klasse B: 9/10
- Mittelwert in Klasse C: 22/10

<u>Theorie</u>:
Verteilung beim Raten nach dem reinen Zufallsprinzip

Vergleich empirische – theoretische Verteilung







Eigenschaften des Erwartungswertes

Linearität:

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

Additivität:

$$E(X+Y) = E(X)+E(Y)$$

Der Erwartungswert einer Summe ist die Summe der Erwartungswerte

Beachte:

$$E(X+X) = E(2X) = 2E(X)$$

aber

$$X+X \neq 2X$$

Zufallsvariable: Augenzahl beim Würfelwurf

Augen-zahl (X)	P(X=x)	x.P(X=x)
1	0,167	0,167
2	0,167	0,333
3	0,167	0,500
4	0,167	0,667
5	0,167	0,833
6	0,167	1,000
		3,5

E(X) = 3,5

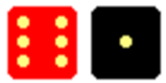
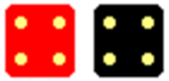
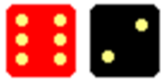
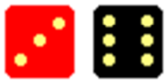
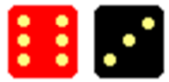
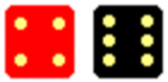
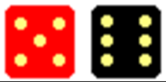
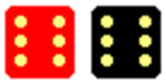
Zufallsvariable Doppelte Augenzahl (2X)

Augen-zahl (2X)	P(X=x)	x.P(X=x)
2	0,167	0,333
4	0,167	0,667
6	0,167	1,000
8	0,167	1,333
10	0,167	1,667
12	0,167	2,000
		7

E(X) = 3,5

E(2X) = 2*3,5=7

Zufallsvariable: Summe der Augenzahl von 2 Würfen

Ergebnis	Augen	Augen	Augen	Augen	Augen	Augen	Möglich-keiten
2							1
3							2
4							3
5							4
6							5
7							6
8							5
9							4
10							3
11							2
12							1

Zufallsvariable X+X (Faltung, Convolution)

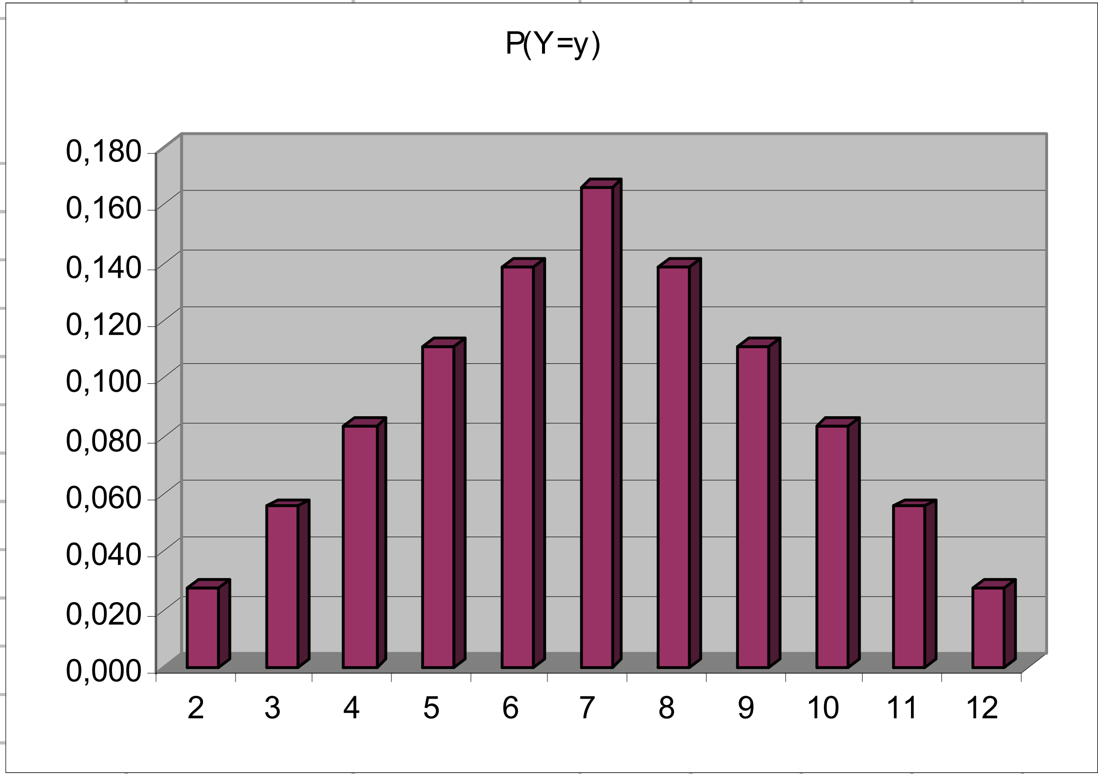
Summe Augenzahl von 2 Würfen

	1	2	3	4	5	6
1	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028
2	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028
3	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028
4	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028
5	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028
6	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028

z.B.: $P(X+X=7)=6/36$

Zufallsvariable X+X

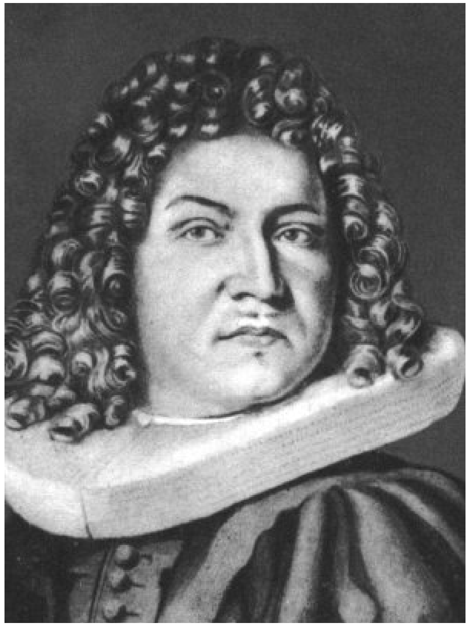
Augen-zahl Y=X+X	P(Y=y)	y.P(Y=y)
2	0,028	0,056
3	0,056	0,167
4	0,083	0,333
5	0,111	0,556
6	0,139	0,833
7	0,167	1,167
8	0,139	1,111
9	0,111	1,000
10	0,083	0,833
11	0,056	0,611
12	0,028	0,333
		7,000

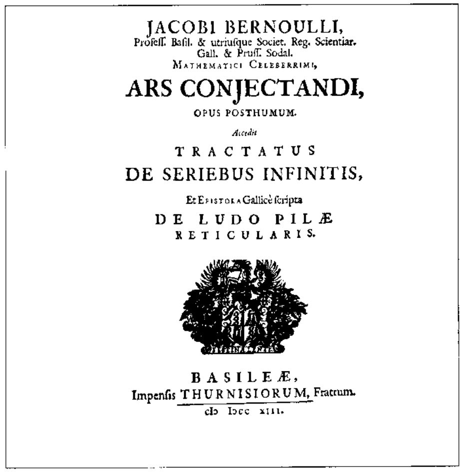


E(X) = 3,5 E(2X) = 2*3,5 = 7 E(X+X) =7= E(2X)

Binomialverteilung

- Jakob Bernoulli (1654-1705)
  Ars Conjectandi
- Klassisches Verteilungsmodell für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für die **Häufigkeit des Eintretens von Ereignissen** in bestimmten noch näher zu charakterisierenden Situationen
- Situationen:
  Fixe Anzahl von unabhängigen Wiederholungen eines Zufallsexperiments mit genau 2 möglichen Ausgängen




JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↃ IↃcc xiii.

Ausgangspunkt: Bernoulli-Versuch

- Zufallsexperiment mit 2 möglichen Ausgängen
  - Münzwurf: Kopf - Adler
  - Geburt: Mädchen - Knabe
  - Allgemein: Erfolg - Misserfolg
  - Erfolgswahrscheinlichkeit: p
  - Wahrscheinlichkeit für Misserfolg: $q=1-p$
- Von Interesse ist also eine binäre Zufallsvariable X
- $X \in \{0, 1\}$,
- wobei 1 bedeutet, dass ein Erfolg vorliegt und 0, dass ein Misserfolg vorliegt.

Bernoulli-Versuch

$$E(X) = \mu = \sum_i x_i p_i$$

X	Prob	X²	X Prob(X)	X² Prob(X)
0	1-p	0	0	0
1	p	1	p	p
			p	p

$E(X)=p$ $\qquad$ $E(X^2)=p$

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2 = p-p^2 = p(1-p)$$

Bernoulli-Versuch (Beispiel)

Würfeln eines 6-ers

X	$Prob(X=x)$	X^2	$X\ Prob(X=x)$	$X^2\ Prob(X=x)$
0	5/6	0	0	0
1	1/6	1	1/6	1/6
			1/6	1/6

E(X)=1/6

V(X)=1/6-1/36 = **5/36**=1/6*5/6

Bernoulli-Versuch (Beispiel)

Würfeln einer geraden Augenzahl

X	$Prob(X=x)$	X^2	$X\ Prob(X=x)$	$X^2\ Prob(X=x)$
0	3/6	0	0	0
1	3/6	1	3/6	3/6
			3/6	3/6

In diesem Fall ist die Unsicherheit über das Ergebnis des nächsten Wurfs größer als zuvor, was sich in der größeren Varianz ausdrückt

$\mathbf{E(X)=3/6}$

$\mathbf{V(X)=}3/6 - 9/36 = \mathbf{9/36}=3/6*3/6$

Binomial-Experiment

- Ein Binomial-Experiment besteht aus einer Folge von Bernoulli-Experimenten, wobei folgende 4 Bedingungen gelten müssen:
  - fixe vorgegebene Anzahl von Versuchen
  - bei jedem einzelnen Versuch gibt es nur 2 mögliche Ausgänge "Erfolg" - "Misserfolg"
  - alle Versuche haben eine konstante Erfolgswahrscheinlichkeit (p)
  - die einzelnen Versuche müssen voneinander unabhängig erfolgen (kein Lerneffekt, kein Ermüdungseffekte, keine Beeinflussung,…)

Beispiel zur Binomialverteilung

- 3 unabhängige Würfelwürfe
- Erfolg (E): 6-er $p=1/6$
- Misserfolg (M): 1,...,5 $q=1-p=5/6$
- Bei jedem einzelnen Wurf 2 Ausgänge
- Der Ereignisraum von 3 Würfen umfasst daher $2^3=8$ mögliche Ereignisse

- X ... Anzahl der Erfolge
- $X \in \{0, 1, 2, 3\}$

Struktur des Stichprobenraums

Ergebnis	X (Anzahl Erfolge)	Prob.		
MMM	0	q^3	$(5/6)^3$	= 0,58
MME	1	pq^2	$1/6*(5/6)^2$	= 0,12
MEM	1	pq^2	$1/6*(5/6)^2$	= 0,12
EMM	1	pq^2	$1/6*(5/6)^2$	= 0,12
MEE	2	p^2q	$(1/6)^2*5/6$	= 0,02
EME	2	p^2q	$(1/6)^2*5/6$	= 0,02
EEM	2	p^2q	$(1/6)^2*5/6$	= 0,02
EEE	3	p^3	$(1/6)^3$	= 0,004

Struktur des Stichprobenraums

Ergebnis	X (Anzahl Erfolge)	Prob.	
MMM	0	q^3	$(5/6)^3 = 0{,}58$
MME	1	pq^2	$1/6*(5/6)^2 = 0{,}12$
MEM	1	pq^2	$1/6*(5/6)^2 = 0{,}12$
EMM	1	pq^2	$1/6*(5/6)^2 = 0{,}12$
MEE	2	p^2q	$(1/6)^2*5/6 = 0{,}02$
EME	2	p^2q	$(1/6)^2*5/6 = 0{,}02$
EEM	2	p^2q	$(1/6)^2*5/6 = 0{,}02$
EEE	3	p^3	$(1/6)^3 = 0{,}004$

Wahrscheinlichkeitsfunktion von X

X=x	Prob	Beispiel
0	q^3	0,58
1	$3pq^2$	0,36
2	$3p^2q$	0,06
3	p^3	0,004

Formel: $$P(X=x)=\binom{3}{x}\cdot p^x\cdot q^{3-x},\quad x=0,1,2,3$$

mögliche Anordnungen der x Erfolge bei 3 Versuchen

Wahrscheinlichkeit der x Erfolge

Wahrscheinlichkeit der 3-x Misserfolge

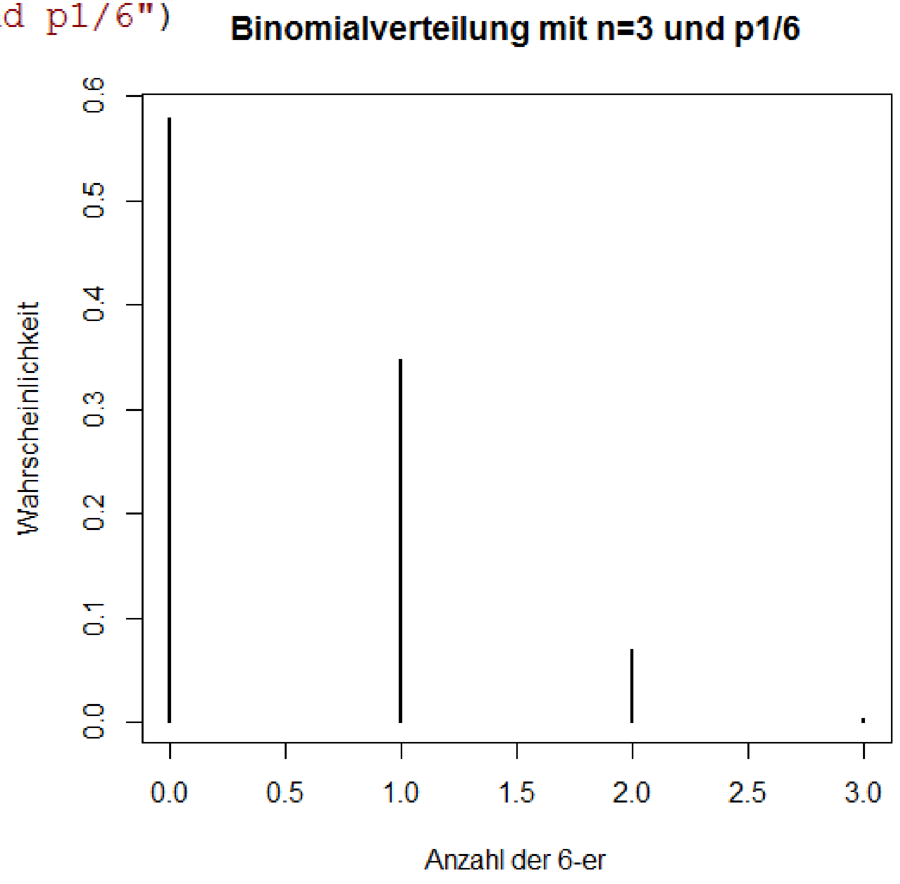
Binomialverteilung

- Allgemein n- Versuche
- Die Zufallsvariable X heißt binomialverteilt mit den Parametern n (fixe Anzahl der Versuche) und p (konstante Erfolgswahrscheinlichkeit)
  $X \sim B(n,p)$,
  wenn ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion durch folgende Formel bestimmt ist:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^{x} \cdot q^{n-x}, \quad x = 0,1,\ldots,n-1,n$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion

```
dbinom(0:3, 3, p=1/6)
plot(0:3, dbinom(0:3, 3, p=1/6),
    type="h", lwd=2, xlab="Anzahl der 6-er",
    ylab="Wahrscheinlichkeit",
    main="Binomialverteilung mit n=3 und p1/6")
```



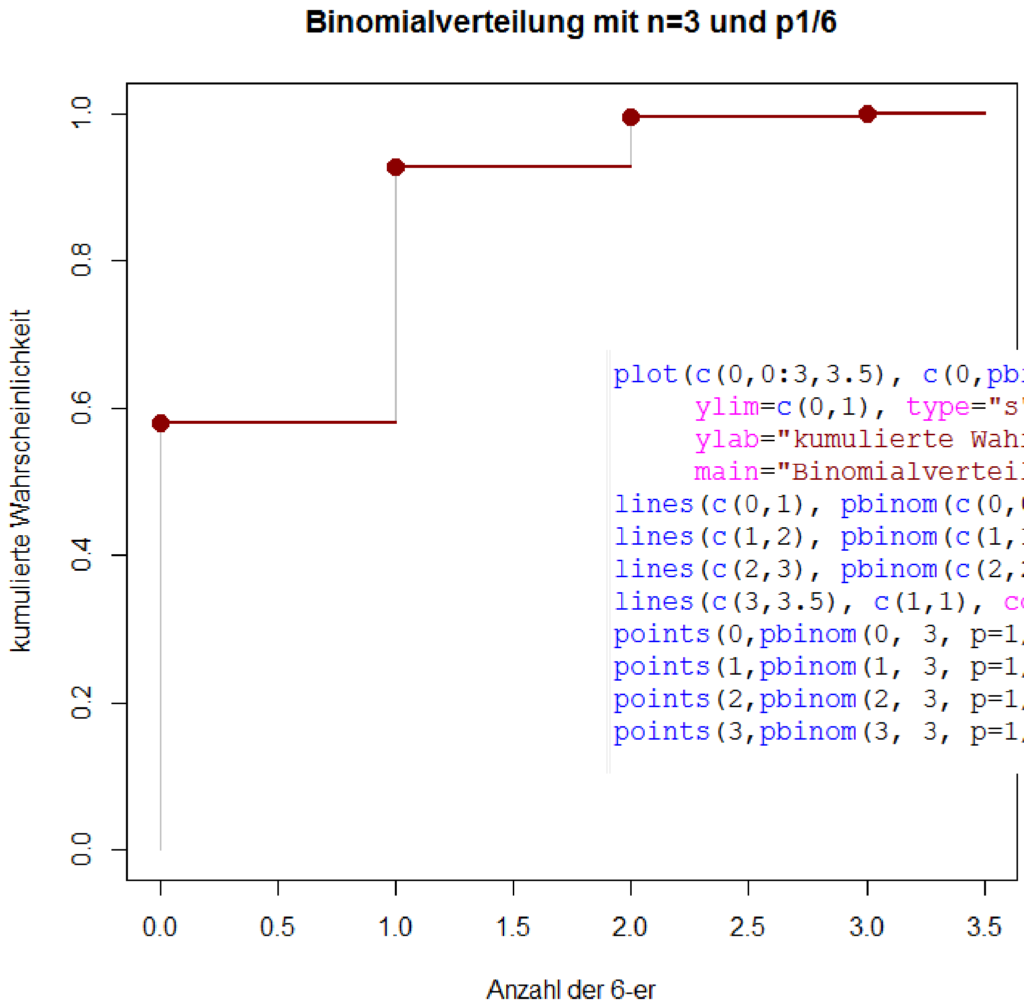
Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion von X

X	Wahrscheinlich-keitsfunktion Prob(X=x)	Verteilungsfunktion Prob(X $\leq$ x)
0	0,579	0,579
1	0,347	0,926
2	0,069	0,995
3	0,005	1,000

```
> dbinom(0:3, 3, p=1/6)
[1] 0.57870370 0.34722222 0.06944444 0.00462963
```

```
> pbinom(0:3, 3, p=1/6)
[1] 0.5787037 0.9259259 0.9953704 1.0000000
```

Verteilungsfunktion




```
plot(c(0,0:3,3.5), c(0,pbinom(0:3, 3, p=1/6),1),
     ylim=c(0,1), type="s", col="grey", xlab="Anzahl der 6-er",
     ylab="kumulierte Wahrscheinlichkeit",
     main="Binomialverteilung mit n=3 und p1/6")
lines(c(0,1), pbinom(c(0,0), 3, p=1/6), col="darkred", lwd=2)
lines(c(1,2), pbinom(c(1,1), 3, p=1/6), col="darkred", lwd=2)
lines(c(2,3), pbinom(c(2,2), 3, p=1/6), col="darkred", lwd=2)
lines(c(3,3.5), c(1,1), col="darkred", lwd=2)
points(0,pbinom(0, 3, p=1/6), cex=1.5, col="darkred", pch=16)
points(1,pbinom(1, 3, p=1/6), cex=1.5, col="darkred", pch=16)
points(2,pbinom(2, 3, p=1/6), cex=1.5, col="darkred", pch=16)
points(3,pbinom(3, 3, p=1/6), cex=1.5, col="darkred", pch=16)
```

Vergleich mit empirischen Daten

X=x	n_i
0	179
1	298
2	141
3	30
	648

3-fach Würfe

Eine Gruppe von Schülern wurde gebeten, immer wieder 3 Würfel zu werfen und die Ergebnisse in Bezug auf die Zahl der aufgetretenen Sechser aufzuzeichnen

Stimmen die Beobachtungen mit dem theoretischen Modell überein?

Vergleich mit empirischen Daten

X=x	Prob(X=x)	n_i	h_i	e_i
0	0,579	179	0,28	375
1	0,347	298	0,46	225
2	0,069	141	0,22	45
3	0,005	30	0,05	3
		648		648

beobachtete Häufigkeiten "observed"

erwartete (theoretische) Häufigkeiten "expected„ n*Prob(X=x)

Offensichtlich besteht eine deutliche Diskrepanz zwischen theoretisch erwarteten Häufigkeiten und den empirischen Daten

Erwartungswert & Varianz

- $X \sim B(n, p)$
- X ergibt sich laut Definition als Summe von n unabhängigen Bernoulli Zufallsvariablen X_i, welche alle die Werte 0 oder 1 annehmen

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n \cdot p$$

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

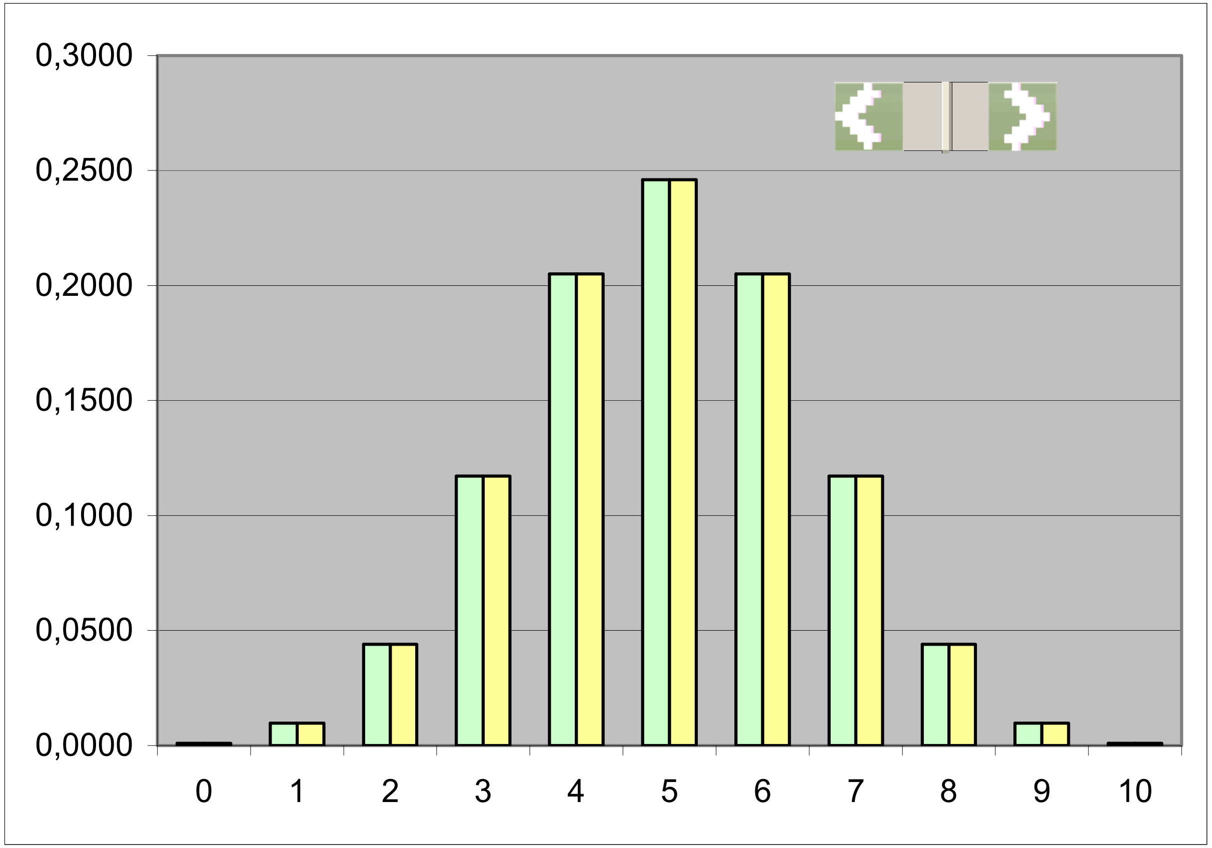
Unabhängigkeit

Interaktive Demonstration zur Binomial-Verteilung

p1= 0,5
p2= 0,50
n= 10

Anzahl Erfolge	Bi(n, p1)	Bi(n, p2)
0	0,0010	0,0010
1	0,0098	0,0098
2	0,0439	0,0439
3	0,1172	0,1172
4	0,2051	0,2051
5	0,2461	0,2461
6	0,2051	0,2051
7	0,1172	0,1172
8	0,0439	0,0439
9	0,0098	0,0098
10	0,0010	0,0010
	1	1

E(X)	**5**	**5**
Var(X)	**2,50**	**2,50**



Beispiel: Urnenmodell

- In einer Urne befinden sich nur rote und schwarze Kugeln
- Der Anteil der roten Kugeln sei 0,25, der der schwarzen Kugeln sei 0,75
- Beim Ziehen mit Zurücklegen bleibt die Wahrscheinlichkeit des Ziehens einer roten Kugel (Erfolg) konstant p=0,25.
- Wir ziehen n=4 Kugeln
- Der Erwartungswert für die Anzahl roter Kugeln ist: n*p = 4*0,25 = 1.
- Cave: d.h. natürlich nicht, dass wir bei 4 Versuchen mit Sicherheit eine rote Kugel ziehen

Wahrscheinlichkeitsfunktion von X

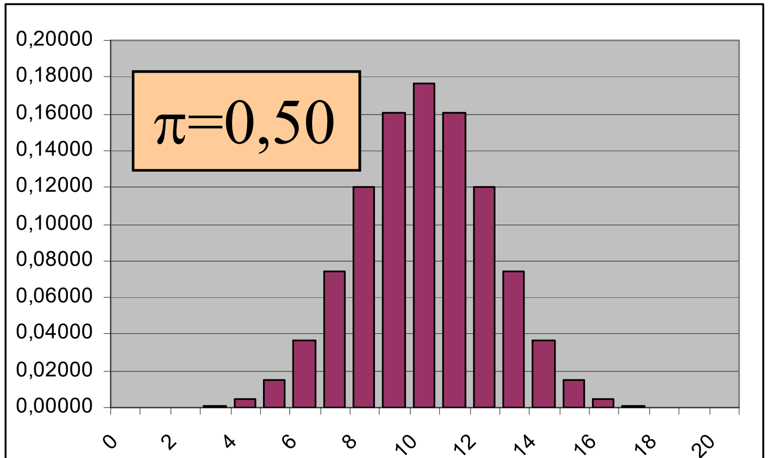
X=x	Prob(X=x)		X.Prob(X=x)
0	0,316	$1*0{,}25^0*0{,}75^4$	0,000
1	0,422	$4*0{,}25^1*0{,}75^3$	0,422
2	0,211	$6*0{,}25^2*0{,}75^2$	0,422
3	0,047	$4*0{,}25^3*0{,}75^1$	0,141
4	0,004	$1*0{,}25^4$	0,015
			E(X) = 1,000

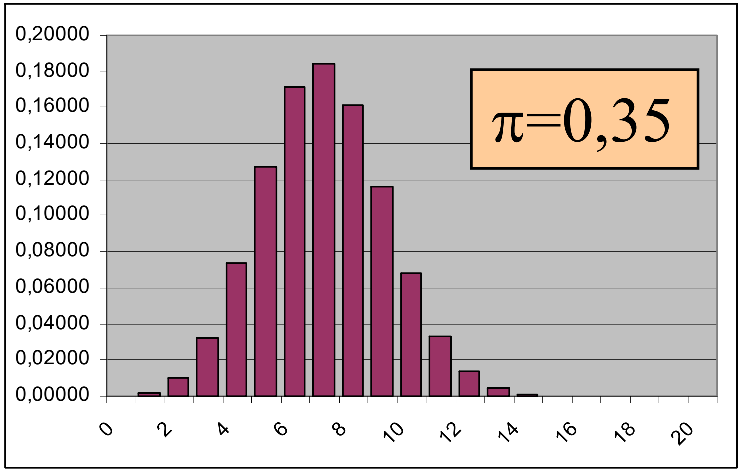
$\text{Prob}(X \geq 1) = 0{,}684$

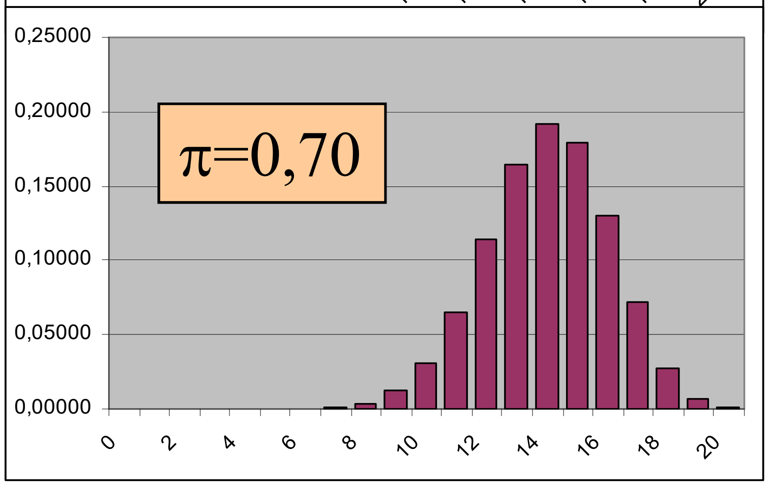
$V(X) = n*p*(1-p) = 4*0{,}25*0{,}75 = 0{,}75$

Standardabw: = 0,87

Unterschiedliche Stichprobenverteilungen (n=20) in Abhängigkeit vom Anteil π in der Grundgesamtheit







Offensichtlich bestimmt der Parameter der Grundgesamtheit die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Stichprobe. Durch Umkehrung können wir aus einer Stichprobe Aussagen über die Parameter der Grundgesamtheit ableiten!

Geometrische Verteilung

- Diese Verteilung ergibt sich, wenn die Anzahl der Versuche nicht fix vorgegeben ist, sondern die Bernoulli-Experimente solange fortgesetzt werden, bis der erste Erfolg eintritt.
- Die interessierende ZV X beschreibt jetzt nicht die Anzahl der Erfolge bei einer fixen Versuchsanzahl, sondern die Anzahl der Versuche, bevor das interessierende Ereignis zum ersten Mal eintritt.
- X ~ Anzahl der Misserfolge
- Wartezeitverteilung

Beispiel zur geometrischen Verteilung

- Bei einem zufälligen Experiment geht man davon aus, dass der Anteil der Erfolge im langfristigen Mittel nur ca. 15% beträgt. In 85% der Durchführungen kommt es zu einem Misserfolg.
- X ... bezeichne die ZV „Anzahl der Misserfolge“ bevor ein erster Erfolg verzeichnet wird
- p Erfolgswahrscheinlichkeit
- q=1-p Wahrscheinlichkeit eines Misserfolges

Beispiel zur geometrischen Verteilung

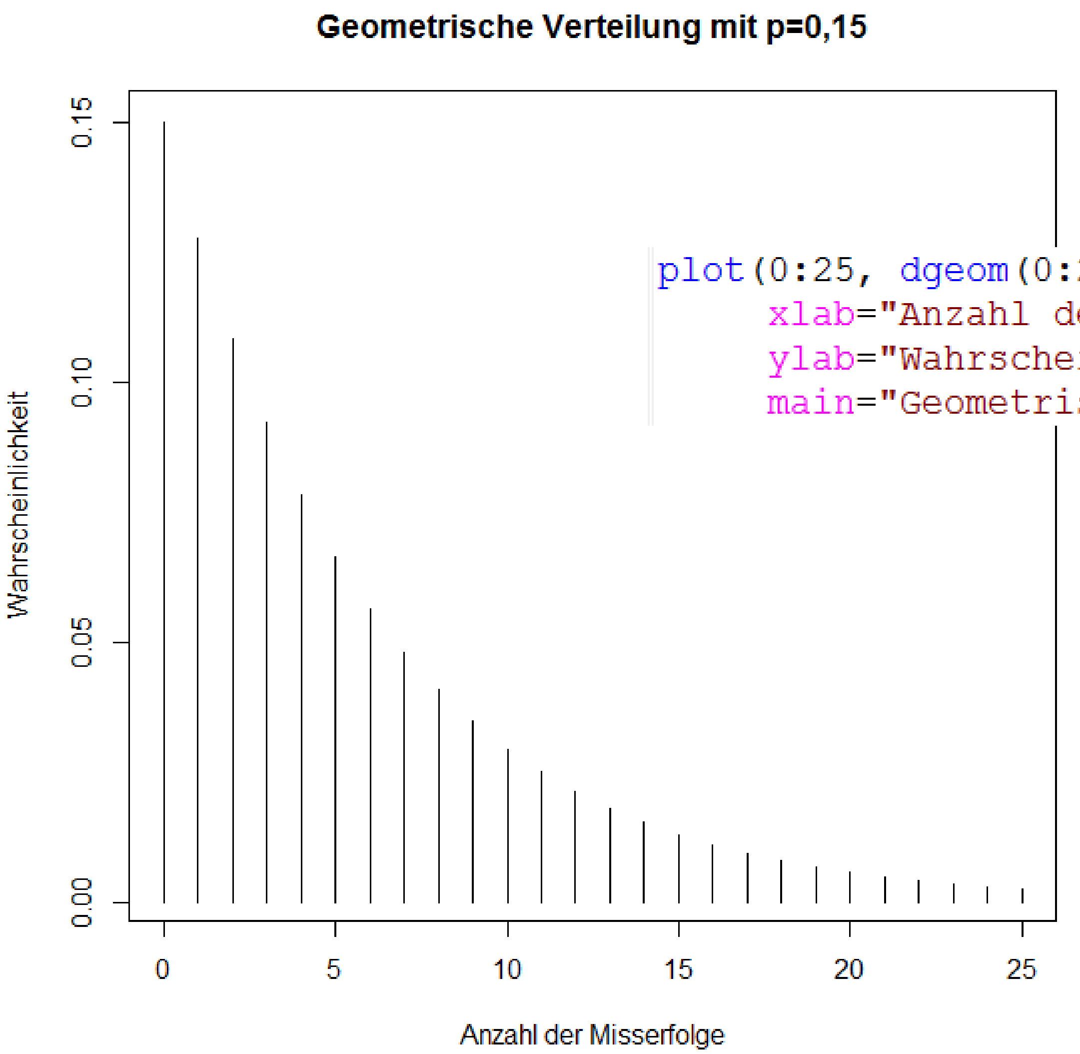
Ereignis	X	Prob.	im Beispiel
E	0	$q^0p=p$	0,15
ME	1	q^1p	0,13
MME	2	q^2p	0,11
MMME	3	q^3p	0,09
MMMME	4	q^4p	0,08
MMMMME	5	q^5p	0,07
MMMMMME	6	q^6p	0,06

etc.

Formel: $X \sim G(p)$ $P(X=x)=q^x p=(1-p)^x p$

Geometrische Folge ➔ Bezeichnung geometrische Verteilung

Wahrscheinlichkeitsfunktion Geometrische Verteilung




```
plot(0:25, dgeom(0:25, p=0.15), type="h",
     xlab="Anzahl der Misserfolge",
     ylab="Wahrscheinlichkeit",
     main="Geometrische Verteilung mit p=0,15")
```

Geometrische Verteilung

$$E(X) = \frac{1-p}{p} = q/p$$

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2} = q/p^2$$

$$\text{Im Beispiel:}$$

$$E(X) = 0{,}85 / 0{,}15 = 5{,}666$$

$$V(X) = 0{,}85 / 0{,}15^2 = 37{,}777$$

$$Std.Abw.(X) = 6{,}15$$

Beachte, dass die Variabilität bei seltenen Ereignissen sehr werden kann.
Im Durchschnitt rechnen wir im Beispiel nach 5-6 Fehlversuchen mit einem Erfolg.
Da die ZV aber eine hohe Variabilität hat können aber auch große Abweichungen mit einer nicht geringen Wahrscheinlichkeit vorkommen.

Interpretationshinweise

p= 0,15

x	P(X=x)	P(X≤x)	P(X>x)
0	0,1500	0,1500	0,8500
1	0,1275	0,2775	0,7225
2	0,1084	0,3859	0,6141
3	0,0921	0,4780	0,5220
4	0,0783	0,5563	0,4437
5	0,0666	0,6229	0,3771
6	0,0566	0,6794	0,3206
7	0,0481	0,7275	0,2725
8	0,0409	0,7684	0,2316
9	0,0347	0,8031	0,1969
10	0,0295	0,8327	0,1673
11	0,0251	0,8578	0,1422
12	0,0213	0,8791	0,1209
13	0,0181	0,8972	0,1028
14	0,0154	0,9126	0,0874
15	0,0131	0,9257	0,0743
16	0,0111	0,9369	0,0631
17	0,0095	0,9464	0,0536
18	0,0080	0,9544	0,0456
19	0,0068	0,9612	0,0388
20	0,0058	0,9671	0,0329
21	0,0049	0,9720	0,0280
22	0,0042	0,9762	0,0238
23	0,0036	0,9798	0,0202
24	0,0030	0,9828	0,0172
25	0,0026	0,9854	0,0146
26	0,0022	0,9876	0,0124
27	0,0019	0,9894	0,0106
28	0,0016	0,9910	0,0090
29	0,0013	0,9924	0,0076
30	0,0011	0,9935	0,0065
…	…	…	…

Wahrscheinlichkeitsfunktion
Probability Function
Verteilungsfunktion
Distribution Function
Überlebensfunktion
Survival Function

Die Wahrscheinlichkeit, dass 20 Fehlversuche auftreten beträgt 0,0058 $X=20$

Die Wahrscheinlichkeit, dass spätestens nach dem 20.Fehlversuch ein Erfolg aufgetreten ist beträgt 0,9671. $X \leq 20$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 20 Fehlversuche vor dem Erfolg auftreten beträgt, 0,0329 $X > 20$

Verteilungsfunktion der Geom. Verteilung

- Herleitung der Formel:
- $P(X > x) = P(X \geq x+1) = ?$
- Ereignis: zumindest x+1 Misserfolge
- $P(X > x) = P(\underbrace{MM...M}_{x+1\text{ - mal}}) = (1-p)^{x+1}$
- $F(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X > x) = 1 - (1-p)^{x+1}$

- Beispiel:
  $F(10) = P(X \leq 10) = 1 - (1-0{,}15)^{11} = 0{,}83$
- Die Wahrscheinlichkeit höchstens 10 Misserfolge vor dem ersten Erfolg zu beobachten ist 0,83.

Anwendungsbeispiel: Binomialverteilung

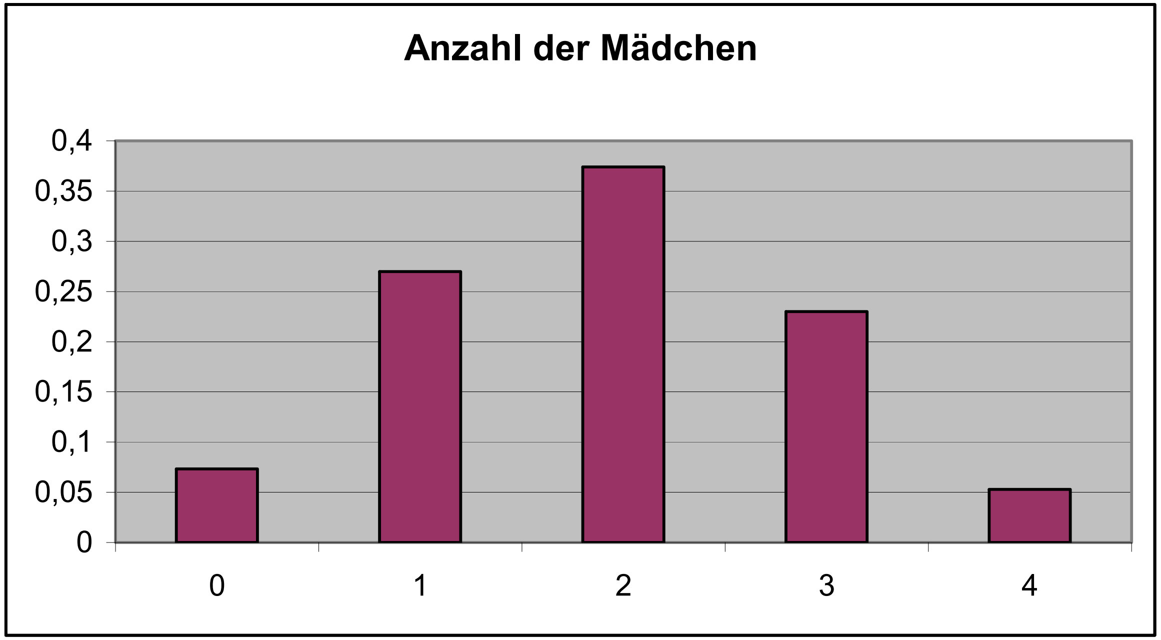
Prob(Knabengeburt)= 0,52
Prob(Mädchengeburt)= 0,48

Familienplanung: 4 Kinder (fixe Anzahl)

X.. Anzahl Mädchen

X	Prob(X=x)
0	0,073116
1	0,269967
2	0,373801
3	0,230031
4	0,053084
	1

Anwendung der Binomialverteilung



Anwendungsbeispiel: Geometrische Verteilung

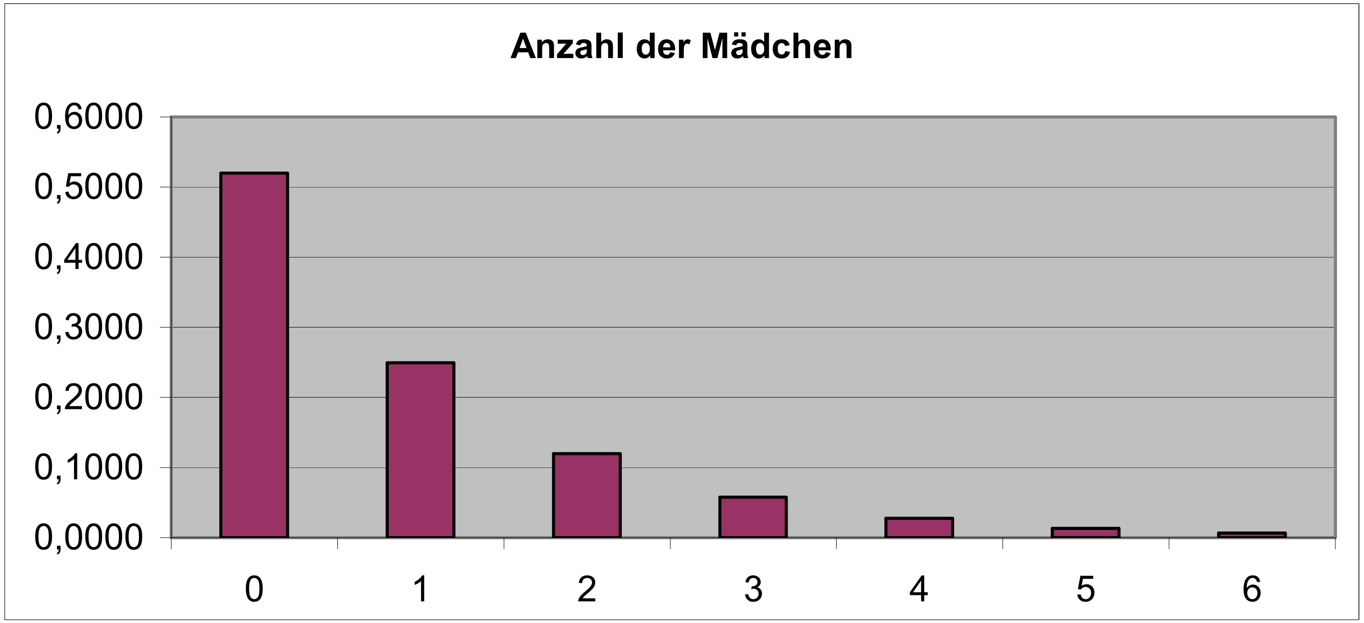
Prob(Knabengeburt)= 0,52
Prob(Mädchengeburt)= 0,48

Familienplanung: ? Kinder mindestens 1 Knabe

X.. Anzahl Mädchen

Anwendung der geometrischen Verteilung

X	Prob(X=x)
0	0,5200
1	0,2496
2	0,1198
3	0,0575
4	0,0276
5	0,0132
6	0,0064



Hypergeometrische Verteilung

- Typischer Anwendungsfall:
  Ziehen ohne Zurücklegen
- Durch den Ziehungsprozess wird die Wahrscheinlichkeit des auch hier zu Grunde liegenden Bernoulli-Experimentes ständig verändert.
- Keine Unabhängigkeit zwischen den einzelnen Ziehungen!
- N ... Umfang der Grundgesamtheit
- M ... Anzahl der in der Grundgesamtheit befindlichen interessierenden Objekte M/N ~ p
- n ... Umfang der Stichprobe
- X ... Anzahl der interessierenden Objekte in der Stichprobe

Ziehen ohne Zurücklegen - Ereignisraum

Grundgesamtheit	N=	10
Rote Kugeln	M=	5
Schwarze Kugeln	N-M=	5

Wir entnehmen nacheinander 3 Kugeln ohne zurücklegen.

Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsfunktion für X(=Anzahl der roten Kugeln)?

1.Ziehung	2.Ziehung	3.Ziehung	X
ROT	ROT	ROT	3
		SCHWARZ	2
	SCHWARZ	ROT	2
		SCHWARZ	1
SCHWARZ	ROT	ROT	2
		SCHWARZ	1
	SCHWARZ	ROT	1
		SCHWARZ	0

Ziehen ohne Zurücklegen - Wahrscheinlichkeiten

			X		
ROT	ROT	ROT	**3**	=60/720	0,08333333
=5/10	=4/9	=3/8	=5/10*4/9*3/8		
		SCHWARZ	**2**	=100/720	0,13888889
		=5/8	=5/10*4/9*5/8		
	SCHWARZ	ROT	**2**	=100/720	0,13888889
	=5/9	=4/8	=5/10*5/9*4/8		
		SCHWARZ	**1**	=100/720	0,13888889
		=4/8	=5/10*5/9*4/8		
SCHWARZ	ROT	ROT	**2**	=100/720	0,13888889
=5/10	=5/9	=4/8	=5/10*5/9*4/8		
		SCHWARZ	**1**	=100/720	0,13888889
		=4/8	=5/10*5/9*4/8		
	SCHWARZ	ROT	**1**	=100/720	0,13888889
	=4/9	=5/8	=5/10*4/9*5/8		
		SCHWARZ	**0**	=60/720	0,08333333
		=3/8	=5/10*4/9*3/8		1
1.Ziehung	2.Ziehung	3.Ziehung			

ZV: Anzahl Rote Kugeln

X	Prob
0	0,08333333
1	0,41666667
2	0,41666667
3	0,08333333
	1

			X		
ROT	ROT	ROT	3	=60/720	0,08333333
=5/10	=4/9	=3/8	=5/10*4/9*3/8		
		SCHWARZ	2	=100/720	0,13888889
		=5/8	=5/10*4/9*5/8		
	SCHWARZ	ROT	2	=100/720	0,13888889
	=5/9	=4/8	=5/10*5/9*4/8		
		SCHWARZ	1	=100/720	0,13888889
		=4/8	=5/10*5/9*4/8		
SCHWARZ	ROT	ROT	2	=100/720	0,13888889
=5/10	=5/9	=4/8	=5/10*5/9*4/8		
		SCHWARZ	1	=100/720	0,13888889
		=4/8	=5/10*5/9*4/8		
	SCHWARZ	ROT	1	=100/720	0,13888889
	=4/9	=5/8	=5/10*4/9*5/8		
		SCHWARZ	0	=60/720	0,08333333
		=3/8	=5/10*4/9*3/8		1
1.Ziehung	2.Ziehung	3.Ziehung			

3	0,083333
2	0,416667
1	0,416667
0	0,083333
	1

Gibt es eine geschlossene Formel?

- Prinzip:
  Günstige durch mögliche Fälle
- Mögliche Fälle $\binom{N}{n}$
- Günstige Fälle $\binom{M}{x}$ $\binom{N-M}{n-x}$
  - x aus M Erfolge bzw. (n-x) aus N-M Misserfolgen

$$P(X = x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Hypergeometrische Verteilung

Eine Zufallsvariable X heißt hypergeometrisch verteilt mit den Parametern N (Umfang der Grundgesamtheit), M (Anzahl der interessierenden Objekte in der Grundgesamtheit) und n (Umfang der Stichprobe) - X~H(N, M, n) - ,wenn die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X wie folgt gegeben ist:

$$P(X = x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$\max\{0, n - (N - M)\} \le x \le \min\{n, M\}$$

Grundgesamtheit:	N=	100
Wähler der Partei A:	M=	50
Nichtwähler der Partei A:	N-M=	50
Stichprobenumfang:	n=	10

Wählen Sie einen Wert zwischen 0 und 100

Anzahl möglicher Stichproben:
17.310.309.456.440

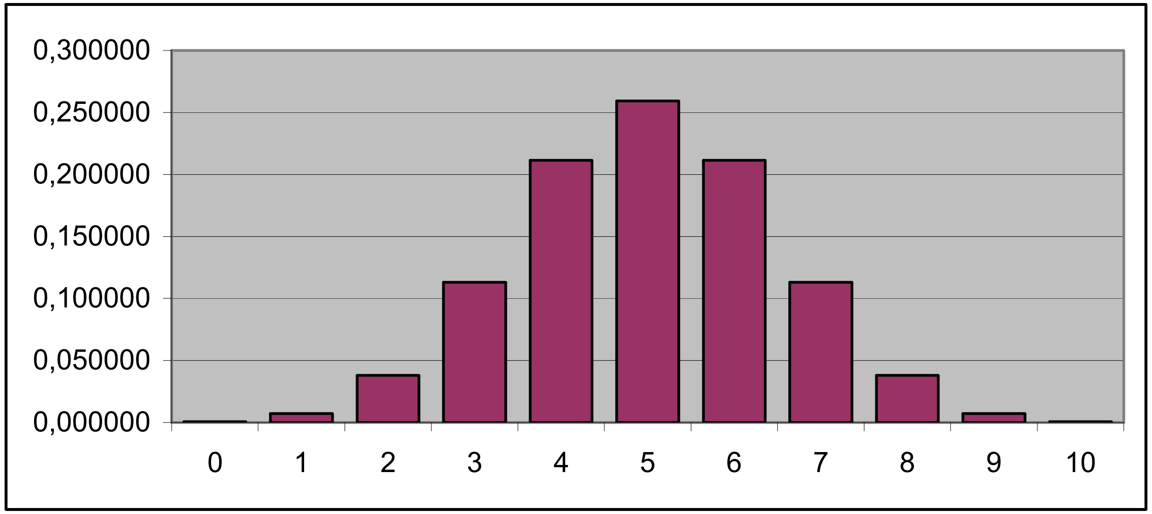
Beispiel:

Bei einer Wahl in einer Gemeinde haben 50 Wähler für die Partei A gestimmt.

Bei einem Exit-Poll befragen Sie zufällig 10 Wähler über ihre Wahlentscheidung.

Angenommen alle Befragten antworten wahrheitsgetreu.

Wieviele Wähler der Partei A erwarten wir dann in unserer Stichprobe?



Beispiel zur hypergeometrischen Verteilung

- In einem Gremium befinden sich 7 Experten.
- 4 Männer und 3 Frauen
- Es werden mittels Los 2 Personen für eine Subkommission ausgewählt.
- Wie lauten die Wahrscheinlichkeiten für die Anzahl der Frauen in der Subkommission?
- $N=7$ $M=3$ $n=2$

Beispiel zur hypergeometrischen Verteilung

$$P(X=0)=\frac{\binom{3}{0}\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}}=6/21 \quad P(X=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{7}{2}}=12/21$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{3}{2}\binom{4}{0}}{\binom{7}{2}}=3/21$$

Beispiel mit der Binomialverteilung

p=3/7

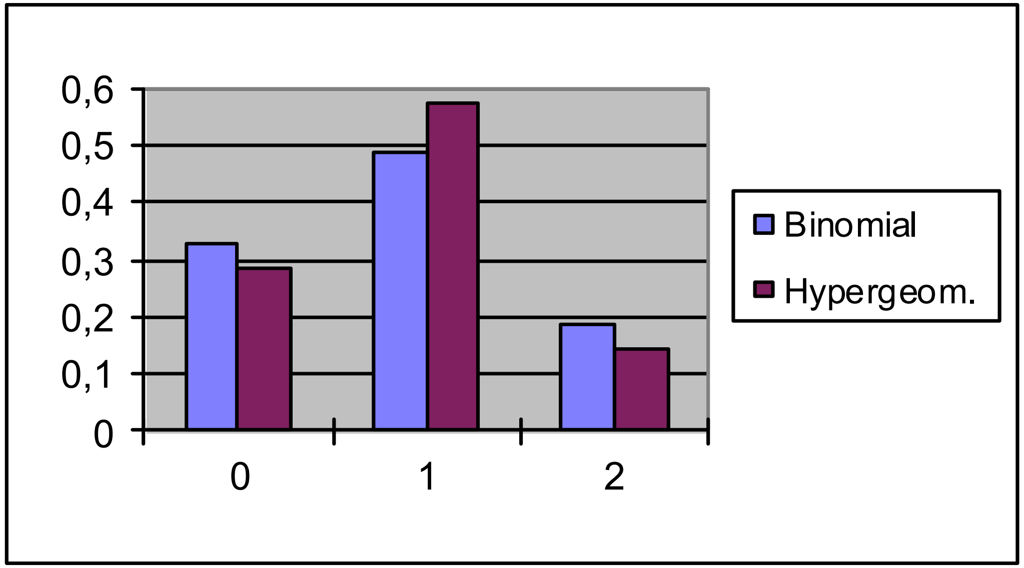
$$P(X=0)=\binom{2}{0}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{0}\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^{2}=16/49$$

$$P(X=1)=\binom{2}{1}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{1}\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^{1}=24/49$$

$$P(X=2)=\binom{2}{2}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{2}\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^{0}=9/49$$

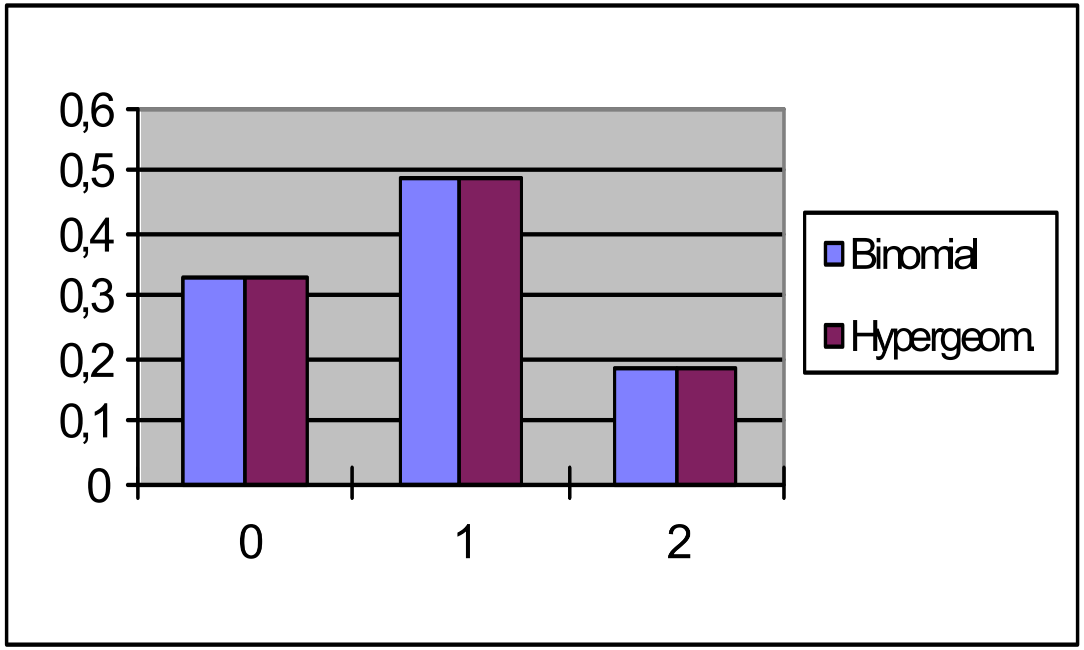
Vergleich Hypergeom. und Binomialverteilung

X	Binomial	Hypergeom.	Erwart. Bi	Erwart. Hy
0	0,3265	0,2857	0,0000	0,0000
1	0,4898	0,5714	0,4898	0,5714
2	0,1837	0,1429	0,3673	0,2857
			0,8571	0,8571



N=700; M=300; n=2

X	Binomial	Hypergeom.	Erwart. Bi	Erwart. Hy
0	0,3265	0,3262	0,0000	0,0000
1	0,4898	0,4905	0,4898	0,4905
2	0,1837	0,1833	0,3673	0,3666
			0,8571	0,8571



Bei einer großen Grundgesamtheit unter Beibehaltung der gleichen Proportionen verschwindet die Differenz!

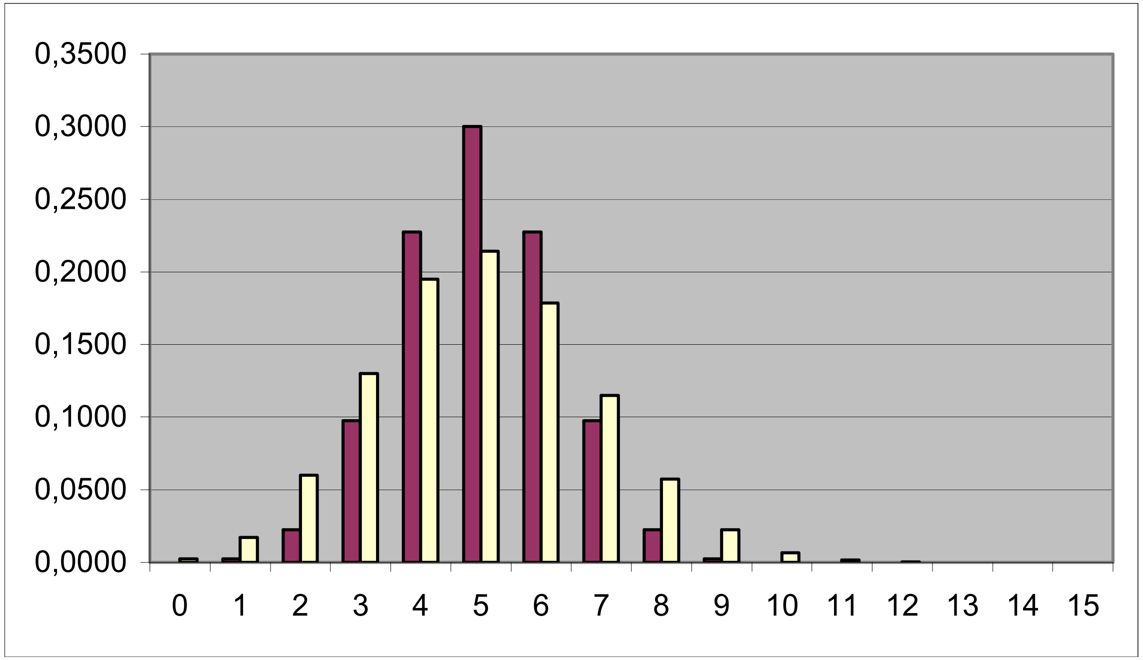
Vergleich BI versus HY

N=	30	Grundgesamtheit	Angestellte
M=	10	Interessierendes Merkmal	Teilzeit-Beschäftigte
p=	0,333333	Anteil in der Grundgesamtheit	
n=	15	Zufallsstichprobe	
	50%	Auswahlsatz	
X=	???	Teilzeit-Beschäftigte in der Stichprobe	

Wähle unterschiedliche Werte und analysiere den Effekt

E(X)= 5

X	HY Prob(X)	Bi Prob(X)
0	0,0001	0,0023
1	0,0025	0,0171
2	0,0225	0,0599
3	0,0975	0,1299
4	0,2274	0,1948
5	0,3001	0,2143
6	0,2274	0,1786
7	0,0975	0,1148
8	0,0225	0,0574
9	0,0025	0,0223
10	0,0001	0,0067
11	0,0000	0,0015
12	0,0000	0,0003
13	0,0000	0,0000
14	0,0000	0,0000
15	0,0000	0,0000



Zusammenfassung:

- Wenn der Auswahlsatz (das ist das Verhältnis des Stichprobenumfangs zur Grundgesamtheit) hinreichend klein ist, kann die Unterscheidung der Stichprobenziehungsmodelle "MIT" und "OHNE" Zurücklegen in vielen praktischen Anwendungsfällen vernachlässigt werden.
- Als eine Faustregel gilt, dass die Approximation dann erfolgen kann, wenn $n/N < 0,05$ ist, der Anteil der Stichprobe also kleiner als 5% ist.
- Man beachte, dass bei der Binomialverteilung der Umfang der Grundgesamtheit (N) nicht in die Rechnung eingeht!

Hypergeometrische Verteilung

- Sei X~H(N, M, n)

Dann gilt

$$p = \frac{M}{N} \quad \text{bzw.} \quad 1-p = 1-\frac{M}{N} = \frac{N-M}{N}$$

$$E(X) = n \cdot \frac{M}{N} = n \cdot p$$

$$V(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{N-M}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1} = n \cdot p \cdot (1-p) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

$$\frac{N-n}{N-1} \approx 1-\frac{n}{N} \approx 1 \text{ bei kleinem Auswahlsatz und großem } N$$

Lotto 6 aus 45

N	45
n	6

Mögliche Ziehungen 8.145.060

Günstige M	6
Ungünstige N-M	39

6 Richtige	1	1	1	0,000000123
5 Richtige	6	39	234	0,000028729
4 Richtige	15	741	11115	0,001364631
3 Richtige	20	9139	182780	0,022440596
2 Richtige	15	82251	1233765	0,151474022
1 Richtige	6	575757	3454542	0,424127262
0 Richtige	1	3262623	3262623	0,400564637
			8145060	1

```
> dhyper(0:6, 6, 39, 6)
[1] 4.005646e-01 4.241273e-01 1.514740e-01 2.244060e-02 1.364631e-03
[6] 2.872907e-05 1.227738e-07
>
```

Capture/Recapture Experiment

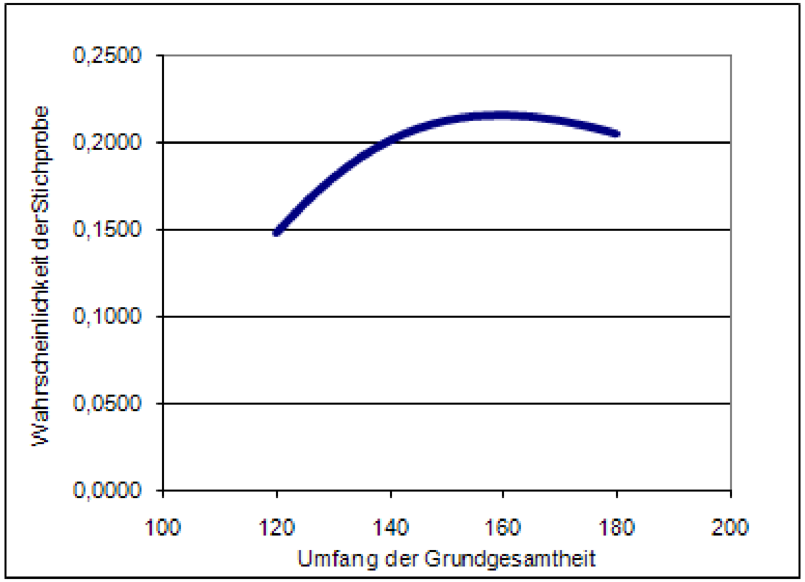
- Klassisches Versuchsdesign, um die Größe einer Population empirisch bestimmen zu können

Capture/ Recapture zur Schätzung der Größe einer Grundgesamtheit

M= 40	Bei der ersten Stichprobe markierte Tiere
n= 20	Umfang der zweiten Stichprobe
m= 5	die in der 2.Stichprobe markiert waren

$$\frac{\binom{40}{5}\binom{N-40}{15}}{\binom{N}{20}}$$

N	Prob (Sample)	Rel. Prob
120	0,1482	0,69
125	0,1654	0,76
130	0,1801	0,83
135	0,1921	0,89
140	0,2015	0,93
145	0,2084	0,96
150	0,2130	0,99
155	0,2156	1,00
160	0,2162	1,00
165	0,2153	1,00
170	0,2131	0,99
175	0,2097	0,97
180	0,2054	0,95



Poissonverteilung

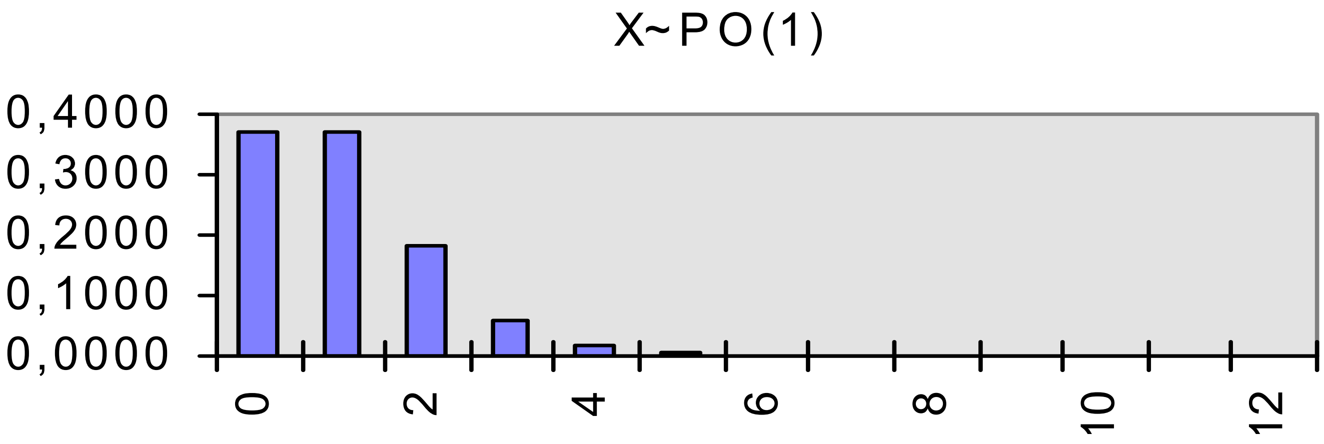
- Wir betrachten ein Binomialexperiment, bei dem n sehr groß und p gleichzeitig sehr klein wird:
- $n \to \infty$, $p \to 0$ und $n.p = \lambda$ (=konstant)
- $E(X) = n.p = \lambda$
- $V(X) = n.p(1-p) = \lambda.(1-\lambda/n) \to \lambda$
- Bei der Poissonverteilung gilt immer Erwartungswert ist gleich Varianz
- $P(X=0) = (1-p)^n = (1-\lambda/n)^n \to e^{-\lambda}$
- Allgemein gilt: $X \sim PO(\lambda)$

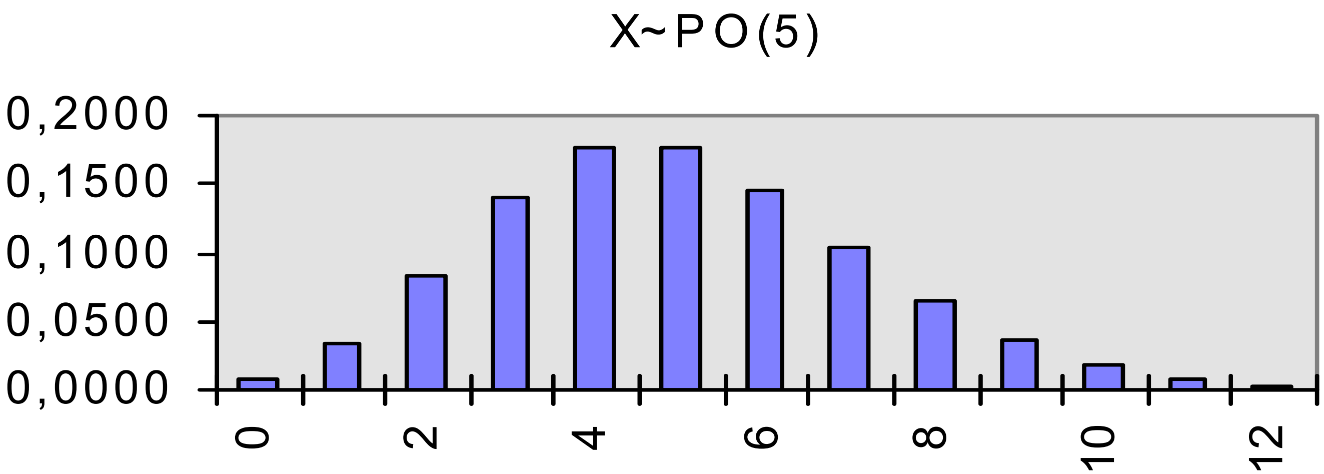
$$P(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

Anwendungen der Poissonverteilung

- Verteilung der seltenen Ereignisse
  - Anzahl der Flugzeugabstürze
  - Anzahl der Tippfehler in einem Buch
  - Anzahl von Unfällen (Preuss. Kavallerie)
- Anzahl der Ereignisse in einem festen Zeitintervall
  - Anzahl der Telefonanrufe in einer Zeiteinheit
  - Anzahl der Geburten pro Minute in einem Land
- Typisch für die Poisson-Verteilung ist, dass Erwartungswert und Varianz gleich groß sind.

2 Poisson-Wahrscheinlichkeitsfunktionen





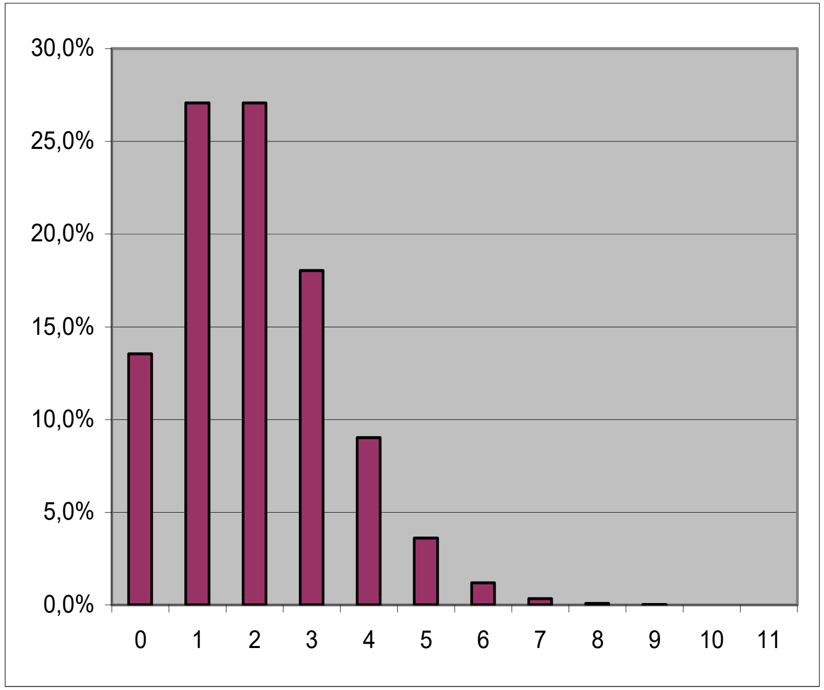
Beispiel zur Poisson-Verteilung

- Die Wahrscheinlichkeit einer Allergie auf ein bestimmtes Medikament betrage 0,001.
- Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass bei 2000 behandelten Patienten (a) genau 3 (b) mehr als 2 (c) mehr als 3 eine allergische Reaktion zeigen.
- $\lambda=np=2000*0{,}001=2$
- (a) $P(X=3)=2^3e^{-2}/3!=4/(3e^2)=0{,}18$
- (b) $P(X>2) = 1-(P(X=0) + P(X=1) + P(X=2))=$
  $1 - 1/e^2 - 2/e^2 - 2/e^2 = 1 - 5/e^2 = 0{,}323$
- (c) $P(X>3) = P(X>2)-P(X=3)=0{,}323-0{,}18=0{,}143$

Wahrscheinlichkeitsfunktion mit Excel

LAMBDA = 2 n=2000 p=0,001

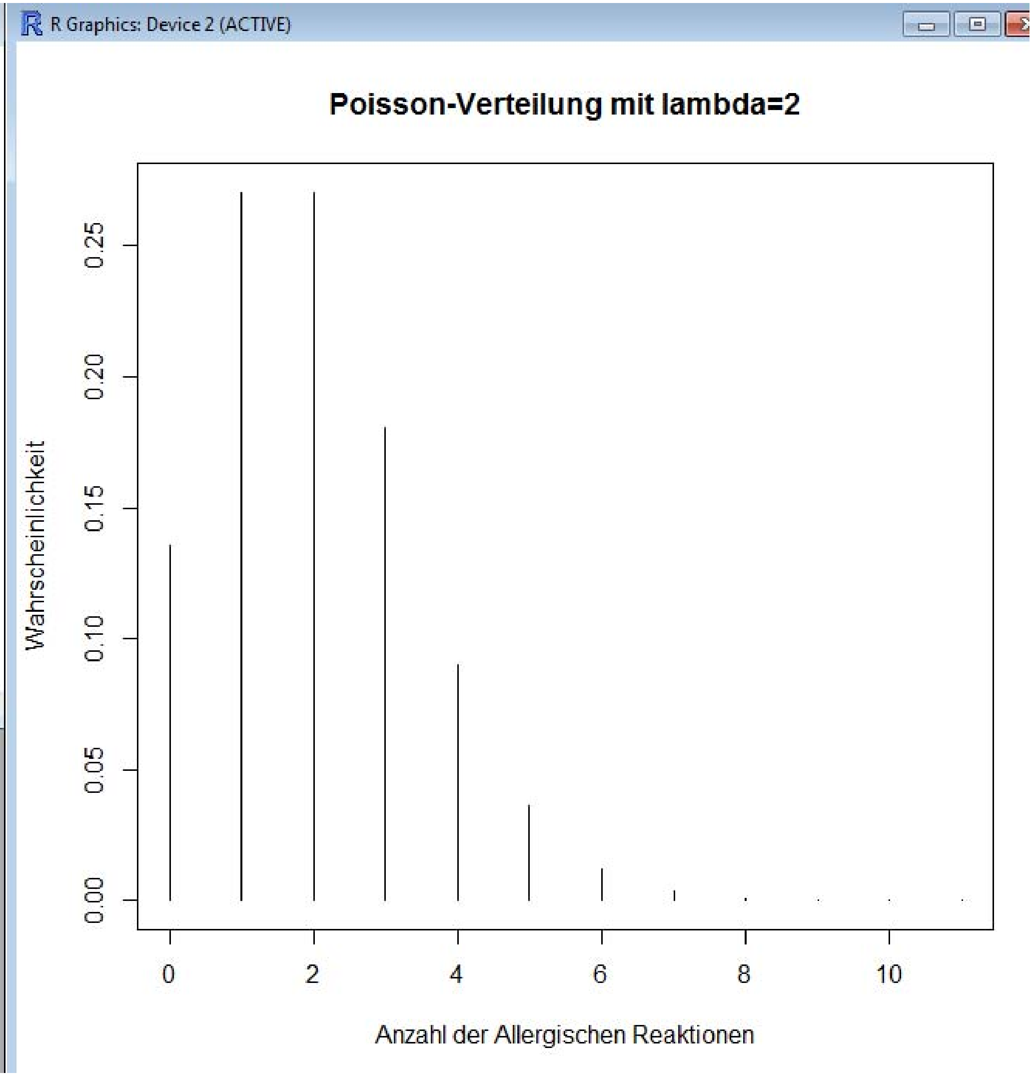
Anzahl	Wahrscheinlich-keitsfunktion	Verteilungs-funktion	Verteilungs-funktion
0	13,5%	13,5%	13,5%
1	27,1%	40,6%	40,6%
2	27,1%	67,7%	67,7%
3	18,0%	85,7%	85,7%
4	9,0%	94,7%	94,7%
5	3,6%	98,3%	98,3%
6	1,2%	99,5%	99,5%
7	0,3%	99,9%	99,9%
8	0,1%	100,0%	100,0%
9	0,0%	100,0%	100,0%
10	0,0%	100,0%	100,0%
11	0,0%	100,0%	100,0%



Wahrscheinlichkeitsfunktion mit R

R Console

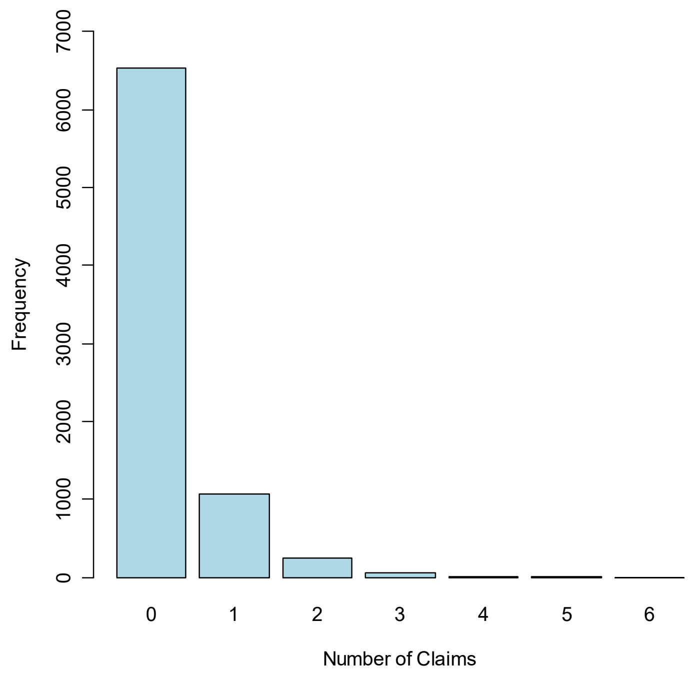
```
> # Posisson Verteilung
> # ================================================================
> dpois(0:11, 2)
 [1] 1.353353e-01 2.706706e-01 2.706706e-01 1.804470e-01 9.022352e-02
 [6] 3.608941e-02 1.202980e-02 3.437087e-03 8.592716e-04 1.909493e-04
[11] 3.818985e-05 6.943609e-06
> plot(0:11, dpois(0:11, 2), type="h",
+      xlab="Anzahl der Allergischen Reaktionen",
+      ylab="Wahrscheinlichkeit",
+      main="Poisson-Verteilung mit lambda=2")
> 
```



Beispiel

- Anzahl Versicherungsschäden pro Polizze
- Frage: passt das Modell der Poissonverteilung?

No of Claims	absolute Frequency	relative Frequency
x_i	n_i	h_i
0	6,524	0.8244
1	1,066	0.1347
2	251	0.0317
3	55	0.0069
4	9	0.0011
5	7	0.0009
6	2	0.0003
	7,914	**1.0000**



Durchschnittliche Schadenszahl pro Polizze

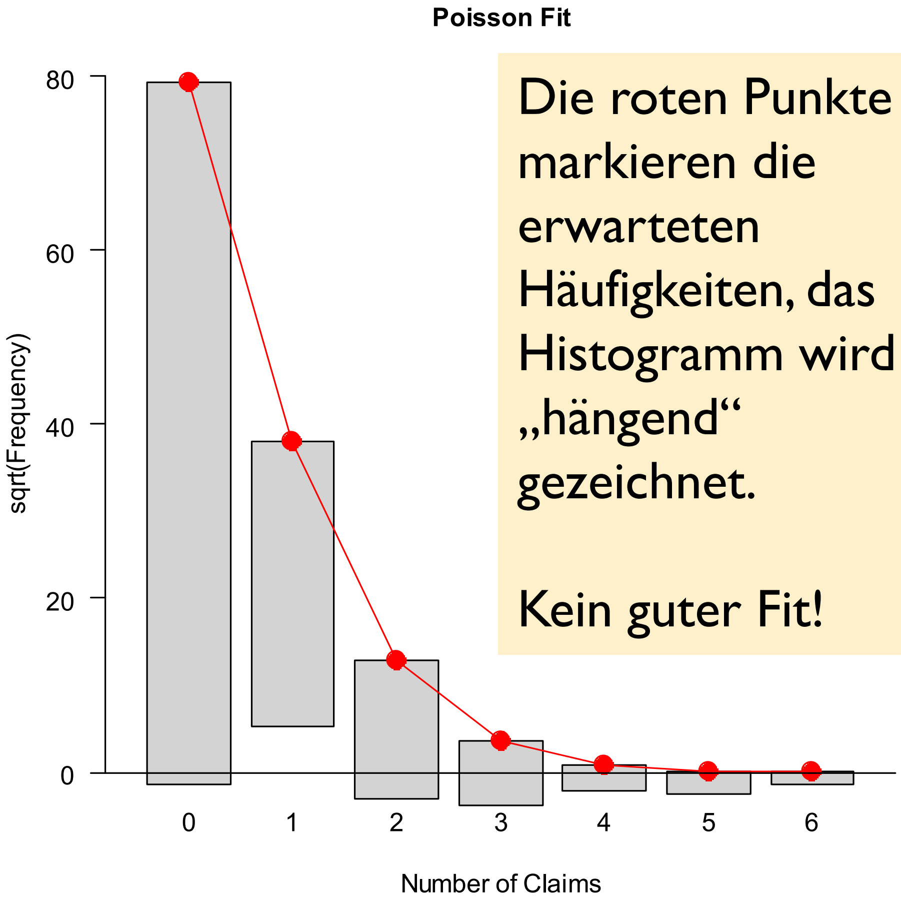
Index	No of Claims	absolute Frequency	relative Frequency	
i	x_i	n_i	h_i	$x_i * h_i$
1	0	6,524	0.8244	0.0000
2	1	1,066	0.1347	0.1347
3	2	251	0.0317	0.0634
4	3	55	0.0069	0.0208
5	4	9	0.0011	0.0045
6	5	7	0.0009	0.0044
7	6	2	0.0003	0.0015
		7,914	1.0000	0.2295

Example: Claim Counts ~ Poisson Model

```
Observed and expected values for poisson distribution

 count observed     expected
     0     6524 6.291293e+03
     1     1066 1.443643e+03
     2      251 1.656340e+02
     3       55 1.266917e+01
     4        9 7.267882e-01
     5        7 3.335475e-02
     6        2 1.275634e-03
```

$\overline{x} = 0.2295 ==> \lambda$



Die roten Punkte markieren die erwarteten Häufigkeiten, das Histogramm wird „hängend“ gezeichnet.

Kein guter Fit!

Negative Binomial

- Ergibt sich als eine Verallgemeinerung der Geometrischen Verteilung, wenn das Bernoulli-Experiment bis zum k-ten Erfolg durchgeführt wird
- Anzahl der Fehversuche bis zum
- X ~ Anzahl der Fehlversuche vor dem k-ten Erfolg

$$P(X = x) = \binom{x + k - 1}{x} p^k (1 - p)^x$$

$$E(X) = \frac{k(1 - p)}{p}$$

$$V(X) = \frac{k(1 - p)}{p^2}$$

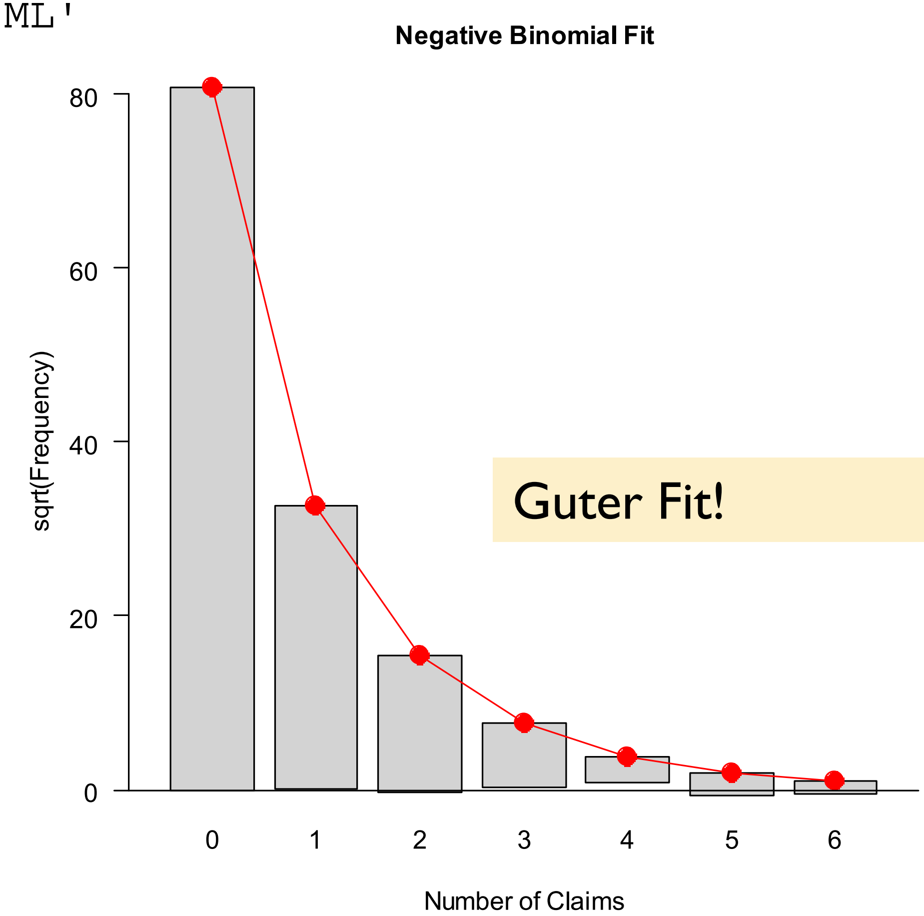
Example: Claim Counts ~ Negative Binomial Model

```
Observed and fitted values for nbinomial distribution
with parameters estimated by `ML'

 count observed      fitted
     0     6524 6523.392335
     1     1066 1071.473812
     2      251  240.257759
     3       55   58.676824
     4        9   14.916890
     5        7    3.881661
     6        2    1.025604
```

$$\mathrm{MLE}(k) = 0.5779$$

$$\mathrm{MLE}(p) = 0.7158$$



Guter Fit!

Alternative zur Poisson-Verteilung

- Die Formel der negativen Binomialverteilung lässt sich auch für nichtganzzahlige Parameterwerte k verallgemeinern
- Die Negativ Binomial Verteilung kann als Alternative zur Poissonverteilung verwendet werden.
- Das ist insbesondere dann hilfreich, wenn die Varianz einer Stichprobe deutlich größer als der Mittelwert ist.
- Bei Modellierung der Daten mit einer Poisson Verteilung wird ja vorausgesetzt, dass Mittelwert gleich Varianz ist. In diesem Fall kann das Modell die in den Daten enthaltene Streuung nicht korrekt wiedergeben.
- Die zweiparametrige negative Binomialverteilung erweist sich hier als wesentlich flexibler
- Es lässt sich zeigen, dass die negative Binomial-Verteilung dadurch entsteht, dass seltene Ereignisse entsprechend der Poisson-Verteilung verteilt sind, aber unterschiedliche Individuen über eine unterschiedliche Intensität λ verfügen.
- Das bedeutet die negative Binomial-Verteilung entsteht als eine Mischverteilung von Poissonverteilten Zufallsvariablen

Discrete Uniform Distribution

- The **discrete uniform distribution** is a probability distribution where a finite number *n* of equally spaced values are equally likely to be observed; every one of the *n* values has equal probability *1/n*.
- Probability mass function:

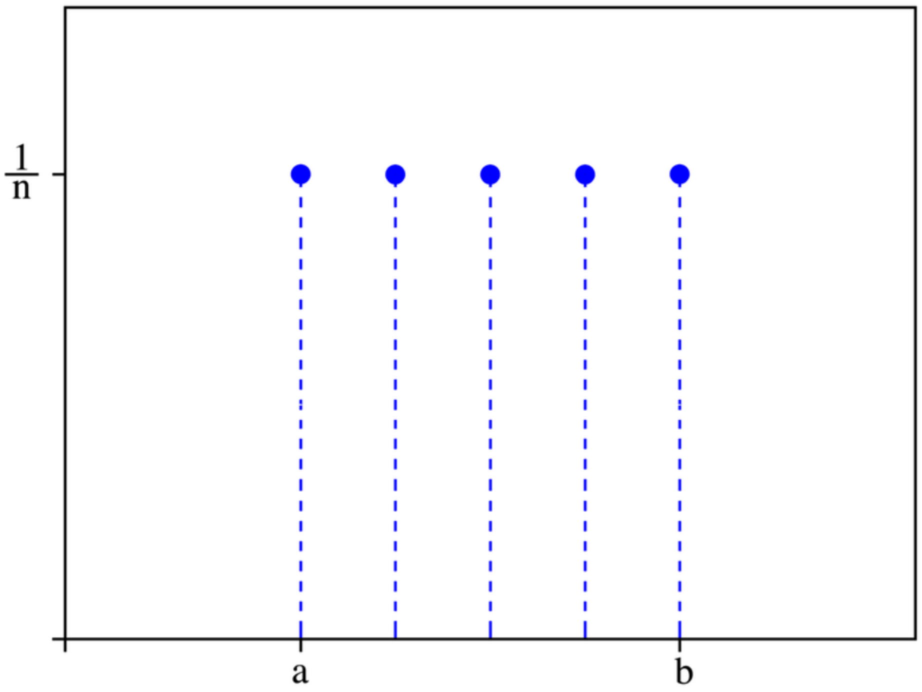
$$a, b \in Z \quad and \quad b \geq a$$

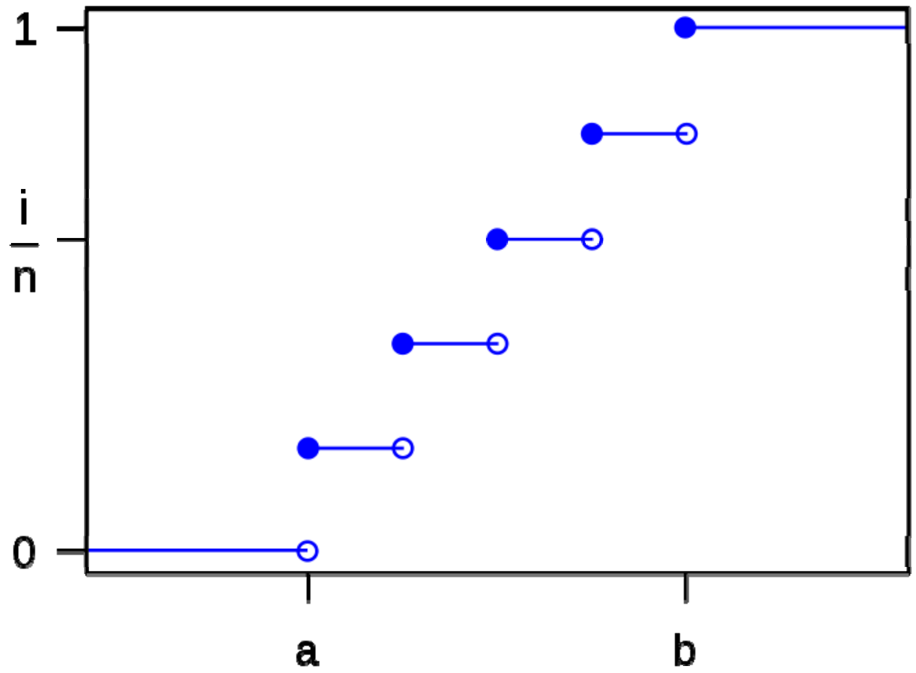
$$f(x; a, b) = \begin{cases} 1/n & x \in \{a, a+1, \ldots, b-1, b\} \\ 0 & x \notin \{a, a+1, \ldots, b-1, b\} \end{cases}$$

$$n = b - a + 1$$

- Simple examples arise when throwing a fair dice or observing the outcome of a perfect roulette wheel

Probability- and Distribution Function





Moments of the Discrete Uniform Distribution

- Expectation: $$\frac{a+b}{2}$$
- Variance: $$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}=\frac{n^2-1}{12},$$