# Blatt 4 - Aufgaben

1) Ein Würfelspiel hat folgende Regeln:

A: Der Spieler bekommt soviele Punkte wie die Anzahl der Augen auf seinem Würfel.

B: Zusätzlich bekommt er 2 Pkte, wenn die Augenzahl gerade ist, und verliert 2, wenn sie ungerade ist.

- Wie viele Punkte bekommt der Spieler erwartungsgemäß? Wie groß ist die Varianz?

Lsg.: Z = "Anzahl Pkte", Y = "Anzahl Pkte durch Regel A", X = "Anzahl Pkte durch Regel B"

$\Rightarrow Z = Y + X \quad \Rightarrow E(Z) = E(Y) + E(X)$

$E(X) = 2 \cdot P(X=2) + (-2) \cdot P(X=-2)$ ← Laplace: 3 gerade, 3 ungerade Zahlen

$= 2 \cdot \frac{3}{6} - 2 \cdot \frac{3}{6} = 0$

$E(Y) = 1 \cdot P(Y=1) + 2 \cdot P(Y=2) + 3 \cdot P(Y=3) + 4 \cdot P(Y=4)$

$+ 5 \cdot P(Y=5) + 6 \cdot P(Y=6)$ ← alle 6 Augenzahlen gleichwahrscheinlich

$= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{6} \cdot (1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3{,}5$

$\Rightarrow E(Z) = E(X) + E(Y) = 0 + 3{,}5 = 3{,}5$

$Var(X) = (2 - E(X))^2 \cdot P(X=2) + (-2 - E(X))^2 \cdot P(X=-2)$

$= (2-0)^2 \cdot P(X=2) + (-2-0)^2 \cdot P(X=-2)$

$= 4 \cdot \frac{3}{6} + 4 \cdot \frac{3}{6} = 4$

$Var(Y) = \sum_{i=1}^{6} (i - E(Y))^2 \cdot P(Y=i) = \sum_{i=1}^{6} (i-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} (i-3{,}5)^2$

$= \frac{1}{6} \left( (1-3{,}5)^2 + (2-3{,}5)^2 + (3-3{,}5)^2 + (4-3{,}5)^2 + (5-3{,}5)^2 + (6-3{,}5)^2 \right)$

$= \frac{1}{6} \left( 2{,}5^2 + 1{,}5^2 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2 + 1{,}5^2 + 2{,}5^2 \right)$

$= \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot (6{,}25 + 2{,}25 + 0{,}25) = \frac{1}{6} \cdot 17{,}5 = \frac{35}{12} \approx 2{,}9167$

$\Rightarrow Var(Z) = Var(X) + Var(Y) = 4 + \frac{35}{12} = \frac{83}{12} \approx 6{,}9167$

2) Berechne Erwartungswert und Varianz der ZV $X$ mit Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -\log\frac{1}{2} \\ 1-2e^{-x} & x \geq -\log\frac{1}{2} \end{cases}$$

log ist hier der natürliche Logarithmus

---

Lsg:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & x < -\log\frac{1}{2} \\ 2e^{-x} & x \geq -\log\frac{1}{2} \simeq 0{,}6931 \end{cases}$$ ist die

Dichtefunktion von $X$

$E(X)$ existiert, wenn $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x)\, dx < \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{-\log\frac{1}{2}} 0\, dx + \int_{-\log\frac{1}{2}}^{\infty} |x| \cdot 2e^{-x}\, dx$$

$$\xrightarrow{\text{pos und damit alle betrachteten } x \text{ pos.}} = 0 + \int_{-\log\frac{1}{2}}^{\infty} x \cdot 2e^{-x} dx = \left[-2(x+1) \cdot e^{-x}\right]_{-\log\frac{1}{2}}^{\infty}$$

$$= 0 - \left(-2\left(-\log\tfrac{1}{2} + 1\right) \cdot \tfrac{1}{2}\right) = 1 - \log\tfrac{1}{2} < \infty$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) = \int_{-\log\frac{1}{2}}^{\infty} x \cdot 2e^{-x} dx \underset{\text{s.o.}}{=} 1 - \log\tfrac{1}{2} \approx 1{,}6931$$

<u>sagemath</u>: `x=var('x'); n(integrate(x*2*exp(-x), x, -ln(1/2), infinity))`

$$Var(X) = E((X-\mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot 2 \cdot e^{-x} dx$$

$$= \int_{-\log\frac{1}{2}}^{\infty} \left(x - \left(1 - \log\tfrac{1}{2}\right)\right)^2 2e^{-x} dx \underset{\text{sage math}}{=} 1$$

Anmerkung (nur zur Information): Beim $E(X)$ muss geprüft werden, ob $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx < \infty$. Damit muss auch für $Var(X)$ als $E((X-\mu)^2)$ geprüft werden, ob $\int_{-\infty}^{\infty} |(X-\mu)^2| f(x) dx < \infty$. Aber da $\int_{-\infty}^{\infty} |(X-\mu)^2| f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (X-\mu)^2 f(x) dx = Var(X)$ wird diese Überprüfung nicht explizit sondern implizit bei der Berechnung von $Var(X)$ vorgenommen.