Blatt 10 - Aufgaben

Gegeben seien die folgenden Daten auf die eine lineare Regression angewendet werden soll:

Nr	1	2	3	4	5	6
x	5	8	10	15	20	26
y	7	18	27	41	47	64

1) Berechne die Maximum-Likelihood-Schätzwerte für die Parameter a, b, σ^2

$$\bar{x} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{84}{6} = 14, \quad \bar{y} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} y_i = \frac{204}{6} = 34$$

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i - 14)(y_i - 34) \approx 135{,}333$$

$$Var(X) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i - 14)^2 \approx 52{,}333$$

$$A = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)} \approx \frac{135{,}333}{52{,}333} \approx 2{,}586$$ ist der M-L-Schätzer für a

$$B = \bar{Y} - A\bar{X} \approx 34 - 2{,}586 \cdot 14 \approx -2{,}204$$ ist der M-L Schätzer für b

$$SSR = \sum_{i=1}^{6}(y_i - (Ax_i + B))^2 \approx 52{,}178$$

$$S^2 = \frac{SSR}{6-2} \approx \frac{52{,}178}{4} \approx 13{,}045$$

-----

2) Bestimme die 95%-Konfidenzintervalle für a, b und σ^2

------

a: $\left[A \pm S\sqrt{\frac{1}{6 \cdot Var(x)}} \cdot t_{6-2;1-0{,}05/2}\right] \approx \left[2{,}586 \pm \sqrt{13{,}045 \cdot \frac{1}{6 \cdot 52{,}333}} \cdot 2{,}776\right]$

$\approx [2{,}586 \pm 0{,}566] \approx [2{,}020;\ 3{,}152]$

b: $\left[B \pm S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{n \cdot Var(x)}} \cdot t_{n-2;1-\alpha/2}\right] \approx \left[-2{,}204 \pm \sqrt{13{,}045\left(\frac{1}{6} + \frac{14^2}{6 \cdot 52{,}333}\right)} \cdot 2{,}776\right]$

$\approx [-2{,}204 \pm 8{,}916] \approx [-11{,}120;\ 6{,}713]$

σ^2: $\left[\frac{SSR}{\chi^2_{n-2;1-\alpha/2}};\ \frac{SSR}{\chi^2_{n-2;\alpha/2}}\right] \approx \left[\frac{52{,}178}{11{,}14};\ \frac{52{,}178}{0{,}484}\right] \approx [4{,}684;\ 10{,}772]$

----

3) Bestimme das Prognoseintervall zum Niveau 0,95

für Y ander Stelle $x_0 = 12$

$\left[(Ax_0 + B) \pm \sqrt{s^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{Var(x) \cdot n}\right)} \cdot t_{n-2;1-\alpha/2}\right]$

$\approx \left[(2{,}586 \cdot 12 - 2{,}204) \pm \sqrt{13{,}045\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{(12-14)^2}{52{,}333 \cdot 6}\right)} \cdot 2{,}776\right]$

$\approx [28{,}828 \pm 10{,}888] \approx [17{,}940;\ 39{,}716]$