Blatt 8

Statistische Tests prüfen anhand von Stichproben, ob ein bestimmtes Verhalten der Grundgesamtheit vorliegt. Dieses Verhalten wird in einer Nullhypothese H_0 und ihrer Alternativhypothese H_1 formuliert. Ein Hypothesentest prüft nun ob die Nullhypothese zu einem bestimmten Signifikanzniveau abgelehnt wird oder nicht. Dieses Signifikanzniveau α sagt aus, dass die Wahrscheinlichkeit H_0 abzulehnen, obwohl H_0 wahr ist, maximal α sein darf. Die Wahrscheinlichkeit H_0 anzunehmen, obwohl H_0 falsch ist, der sogenannte β-Fehler wird nicht kontrolliert. Daher wird auch gesagt, dass H_0 nicht abgelehnt wird und <u>nie</u>, dass H_0 angenommen wird. Die Ablehnung von H_0 ist also ein viel stärkere Aussage.

	H_0 nicht ablehnen	H_0 ablehnen
H_0 wahr	✓	α-Fehler (kontrolliert)
H_0 falsch	β-Fehler (nicht kontrolliert)	✓

Die Entscheidung, ob nun H_0 abzulehnen ist, ergibt sich aus dem Vergleich einer Prüfgröße und einem kritischen Wert. Die Prüfgröße wird aus den vorliegenden Daten gewonnen und der kritische Wert ergibt sich aus der Verteilung der Prüfgröße und dem gewählten α.

Gauß-Test:

$X_1, \dots, X_n$ unabhängig, identisch verteilt mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ und σ^2 ist bekannt bzw. $n \geq 30$ und $Var(X_i) = \sigma^2$. Dann gibt es drei mögliche H_0-Hypothesen:

a) $H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu \neq \mu_0$ b) $H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu < \mu_0$

c) $H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu > \mu_0$

wobei $E(X_i)=\mu$ und μ_0 der Wert ist, mit dem getestet werden soll.

Für alle 3 Fälle wird die Prüfgröße

$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ berechnet, die annähernd standardnormalverteilt ist.

Daher wird H_0 abgelehnt, wenn

a) $|Z| > Z_{1-\alpha/2}$

b) $Z < -Z_{1-\alpha}$

c) $Z > Z_{1-\alpha}$

Der Fall a) wird auch als zweiseitiger Gauß-Test bezeichnet

Zweistichproben-Gauß-Test

Sind $X_1,\dots,X_n, Y_1,\dots,Y_k$ unabhängig $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_X,\sigma_X^2)$, $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_Y,\sigma_Y^2)$, σ_X^2, σ_Y^2 bekannt, können die Nullhypothesen

a) $H_0: \mu_X = \mu_Y$ b) $H_0: \mu_X \leq \mu_Y$ c) $H_0: \mu_X \geq \mu_Y$

mit der Prüfgröße $T = \frac{\bar{Y}-\bar{X}}{\sqrt{\sigma_X^2/n + \sigma_Y^2/k}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ getestet werden.

H_0 wird abgelehnt, wenn

a) $|T| > z_{1-\alpha/2}$ b) $T < -z_{1-\alpha}$ c) $T > z_{1-\alpha}$

Bei unbekannter Varianz und Stichprobengrößen < 30 kann keine Normalverteilung bei den Prüfgrößen angenommen werden. In diesen Fällen wird statt dem Gauß-Test ein t-Test verwendet.

t-Test

$X_1, \dots, X_n$ unabhängig, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 unbekannt
Dann ist die Prüfgröße für die Nullhypothesen

a) $H_0: \mu = \mu_0$ b) $H_0: \mu \leq \mu_0$ c) $H_0: \mu \geq \mu_0$

der Wert $T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{s^2}}$ und t_{n-1}-verteilt. s^2 ist die Stichprobenvarianz.

H_0 kann abgelehnt werden, wenn

a) $|T| > t_{1-\alpha/2}(n-1)$ b) $T > t_{1-\alpha}(n-1)$ c) $T < -t_{1-\alpha}(n-1)$

Zweistichproben-t-Test

$X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_k$ unabhängig, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, $\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2$ unbekannt:

Nullhypothesen: a) $H_0: \mu_X = \mu_Y$ b) $H_0: \mu_X \leq \mu_Y$ c) $H_0: \mu_X \geq \mu_Y$

Prüfgröße: $T = \sqrt{\frac{n \cdot k \cdot (n+k-2)}{n+k}} \cdot \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{(n-1)s_X^2 + (k-1)s_Y^2}}$, $s_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$,

$s_Y^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k} (Y_i - \bar{Y})^2$

T ist $t(n+k-2)$-verteilt

H_0 ablehnen, wenn: a) $|T| > t_{1-\alpha/2}(n+k-2)$ b) $T < -t_{1-\alpha}(n+k-2)$

c) $T > t_{1-\alpha}(n+k-2)$

Approximativer Binomialtest

Soll getestet werden wie groß π in einer $B(n, \pi)$-Verteilung ausfällt, so wird dies mit einer Prüfgröße getan, die annähernd standardnormalverteilt ist (wegen dem Grenzwertsatz).

Nullhypothesen: a) $H_0: \pi = \pi_0$; $H_1: \pi \neq \pi_0$ b) $H_0: \pi = \pi_0$; $H_1: \pi < \pi_0$

c) $H_0: \pi = \pi_0$; $H_1: \pi > \pi_0$

Prüfgröße: $Z = \frac{\bar{X} - n\pi_0}{\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)}} = \frac{\bar{X} - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}} \overset{approx}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$

H_0 wird abgelehnt, wenn: a) $|z| > z_{1-\alpha/2}$ b) $z < -z_{1-\alpha}$ c) $z > z_{1-\alpha}$

χ^2-Test

Dieser Test prüft wie groß die Streuung von ZVen ist. $X_1, \dots, X_n$ unabhängig, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 unbekannt

Nullhypothese: a) $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ b) $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ c) $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$

Prüfgröße: $T = \frac{n-1}{\sigma_0^2} \cdot s^2 \sim \chi^2_{n-1}$

H_0 ablehnen, wenn: a) $T < q_{\alpha/2}(n-1)$ oder $T > q_{1-\alpha/2}(n-1)$

b) $T > q_{1-\alpha}(n-1)$ c) $T < q_\alpha(n-1)$

F-Test

Der F-Test vergleicht zwei Standardabweichungen miteinander.

$X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_k$ unabhängig, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$, $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, $\mu_x, \mu_Y, \sigma_x^2, \sigma_Y^2$ unbekannt.

Nullhypothese: a) $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_Y^2$ b) $H_0: \sigma_x^2 \leq \sigma_Y^2$ c) $H_0: \sigma_x^2 \geq \sigma_Y^2$

Prüfgröße: $T = \frac{S_x^2}{S_Y^2} \sim F_{n-1,k-1}$

H_0 ablehnen, falls: a) $T > F_{1-\alpha/2}(n-1, k-1)$ oder $T < F_{\alpha/2}(n-1, k-1)$

b) $T > F_{1-\alpha}(n-1, k-1)$ c) $T < F_\alpha(n-1, k-1)$

$F_\alpha(n,k)$ ist ein Quantil der Fischerverteilung, für diese gilt $F_\alpha(n,k) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(k,n)}$