Blatt 8 - Aufgaben

Seien 49 Datenpunkte für eine ZV X bekannt mit Mittelwert 22. Zudem sei bekannt, dass X $\mathcal{N}(\mu, 16)$-verteilt ist.

a) Prüfe die Nullhypothese $\mu = 20$ gegen die Alternativhypothese $\mu > 20$ zum Niveau $\alpha = 5\%$.

b) Wie groß ist der β-Fehler, wenn der wahre Wert $\mu = 21$ ist?

c) Angenommen 16 wäre nur die geschätzte Varianz s^2 und die Varianz der Grundgesamtheit σ^2 unbekannt, prüfe die Nullhypothese aus (a)

---

a) $H_0: \mu = 20$; $H_1: \mu > 20$

Für diesen Gauß-Test ist die Prüfgröße

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{22-20}{\sqrt{16}}\sqrt{49} = \frac{2}{4}7 = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

H_0 wird abgelehnt, falls $z > z_{1-\alpha}$.

Da $z_{1-\alpha} = z_{0{,}95} = 1{,}645 < 3{,}5 = z$, muss die Hypothese $\mu = 20$ abgelehnt werden.

b) Der β-Fehler ist die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 nicht abgelehnt wird, obwohl H_1 wahr ist.

H_0 wird hier genau dann nicht abgelehnt, wenn $z \leq z_{1-\alpha}$. Gesucht ist also $P(z \leq z_{1-\alpha}) = P(z \leq 1{,}645)$

Da $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ und $\mu = 21$, $\sigma^2 = 16$, $n = 49$ gilt, ist

$\bar{X} \sim \mathcal{N}(21, \frac{16}{49})$ und so auch $(\bar{X} - 21)\sqrt{\frac{49}{16}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = (\bar{X} - 20)\frac{7}{4}$ ist also, wegen $(21-20) \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{4}$

und $\frac{16}{49} \cdot \frac{7^2}{4^2} = 1$, $\mathcal{N}(\frac{7}{4}, 1)$-verteilt.

$$P(Z \leq 1{,}645) = P\left(\frac{Z - \frac{7}{4}}{1} \leq 1{,}645 - \frac{7}{4}\right) = P(\underbrace{Z - \tfrac{7}{4}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} \leq -0{,}105)$$

$$= \Phi(-0{,}105) = 1 - \Phi(0{,}105) = 1 - 0{,}458 = 0{,}542$$

$$= \beta$$

c) Da $n = 49 > 30$, darf dennoch der Gaußtest angewendet werden. Es gelten die Ergebnisse aus Teilaufgabe (a).